

DS 5 - signal sinusoïdal, filtrage, rotation d'un objet ponctuel et mouvements dans un champ de gravitation newtonien

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **3 parties et sous-parties indépendantes**.
- Les calculatrices **sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad 10^{-1.25} \approx 0,056 \quad \left(\frac{80}{3.6}\right)^2 \approx 5 \times 10^2 \quad (80 \times 3.6)^2 \approx 8 \times 10^4.$$

1 Toboggan aquatique

Adapté du concours EPITA-IPSA-ESME - MP, MPI, PC, PT et TSI (2023)

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

1.1 Étude d'un toboggan rectiligne (15 pt)

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la Figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

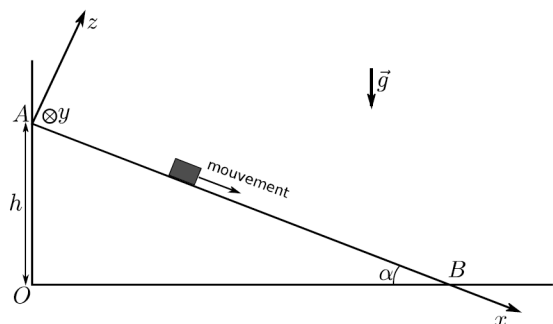


Figure 1: Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de WaveIsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France $h = 33$ m et $\alpha \approx 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92 \text{ km/h}$.

2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la Figure 1 (droite), avec \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon \vec{e}_x seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

3. À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .
4. Exprimer le travail de la force \vec{R} , pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .
5. À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

6. La Figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h . En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

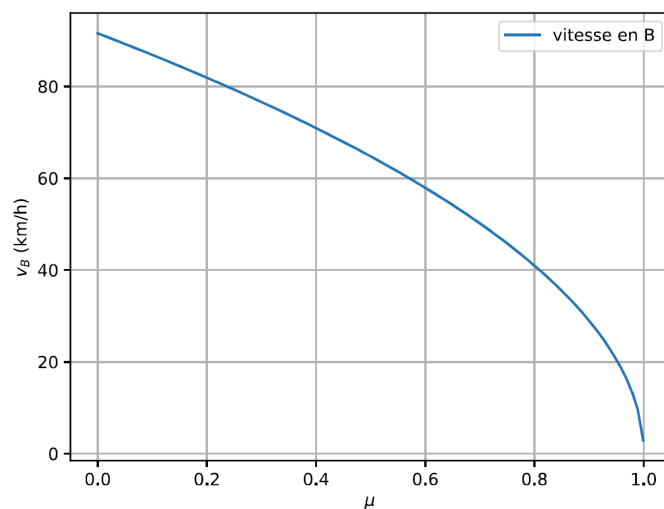


Figure 2: Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

7. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

1.2 Étude d'un virage (19 pt)

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

1.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la Figure 3. On néglige tout frottement. On note \vec{g} le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la Figure 3, avec les vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

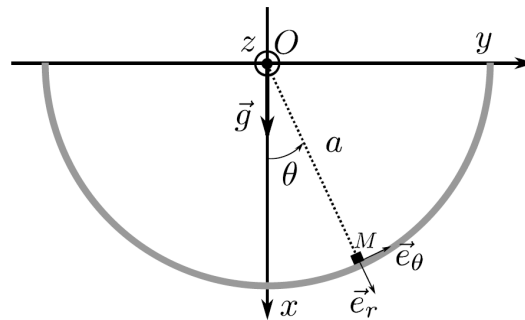


Figure 3: Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grise). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

8. Donner l'expression du moment cinétique L_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
9. Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .
10. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.
11. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.
Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
12. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.
13. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

1.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté Figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (Figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan Oxy , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids \vec{P} , à \vec{F} , et à la réaction normale \vec{N} du toboggan (on néglige tout frottement).

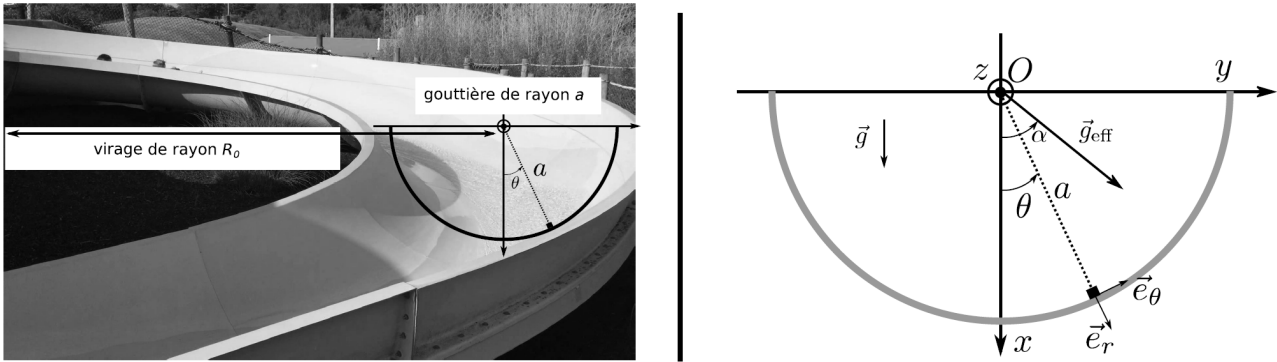


Figure 4: Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

14. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m \vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec \vec{g}_{eff} une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .
15. Donner également l'expression de l'angle α : entre \vec{g}_{eff} et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .
- Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.
16. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous partie 1.2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.
- Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

2 Détecteur de wagon

Adapté du concours EPITA-IPSA-ESME - MP, MPI, PC, PT et TSI (2023)

Dans les attractions qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif, que nous étudions dans cette partie. Sauf pour la toute dernière, les sous-parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

2.1 Étude d'un circuit RLC (14 pt)

On étudie le circuit RLC série représenté Figure 7. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et le condensateur est chargé à la tension $U_0 > 0$. À $t = 0$ l'interrupteur est fermé. On étudie l'évolution de la tension $u_c(t)$ bornes du condensateur Figure 6.

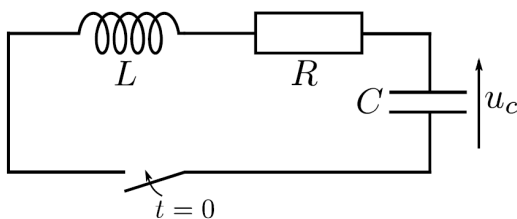


Figure 5: Circuit RLC étudié dans cette sous-partie.

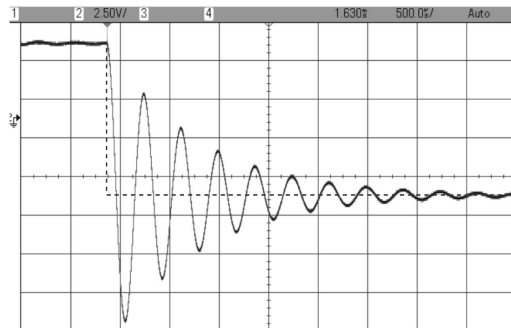


Figure 6: Relevé expérimental de la tension $u_c(t)$.

17. Démontrer que $u(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0. \tag{1}$$

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R , L et C .

18. On se place dans le régime qui est suivi sur le relevé de la Figure 6. Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de Q ?
Toujours à l'aide de la Figure 6, estimer approximativement sans calculs la valeur de Q .
19. Toujours dans le cas du régime suivi Figure 6, établir l'expression de la solution de l'équation 1. On l'exprimera en fonction de ω_0 , Q , du temps t , et de deux constantes d'intégration A et B qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.
20. Justifier soigneusement pourquoi $u_c(0^+) = U_0$ et $i(0^+) = 0$, où i est le courant dans le circuit et où l'instant 0^+ signifie "juste après la fermeture de l'interrupteur".
21. En déduire les expressions des constantes d'intégration A et B .
22. Montrer que si Q est grand devant 1, alors on peut approximer la pseudo-période des oscillations par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ce qui précède montre que le circuit RLC oscille naturellement à une fréquence qui fait intervenir l'inductance L . Le relevé de la Figure 6 montre que cette fréquence vaut $f_0 = 2660\text{Hz}$. Si l'inductance L est modifiée par le passage d'un wagon, alors la fréquence d'oscillation change. Il reste donc à obtenir un moyen de détecter un changement de fréquence.

2.2 Étude d'un multiplieur (4 pt)

On dispose du signal produit par le circuit RLC précédent. On néglige l'amortissement des oscillations (en réalité, on modifie le circuit pour annuler cet amortissement, d'une façon non étudiée ici), ce qui revient à considérer que le signal produit aux bornes de u_c Est de la forme :

$$e_1(t) = U_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t].$$

Ci-dessus f_0 est la fréquence d'oscillation du circuit en l'absence de wagon, et $f_0 + \Delta f$ est ce que devient cette fréquence en présence d'un wagon.

Ce signal est envoyé à l'entrée d'un multiplieur. Sur la seconde entrée du multiplieur est envoyé un signal de référence,

$$e_2(t) = U'_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

dont la fréquence est fixe, indépendamment du passage ou non d'un wagon. Le multiplieur produit à sa sortie le signal :

$$v(t) = K e_1(t) \times e_2(t),$$

avec $K > 0$ une constante.

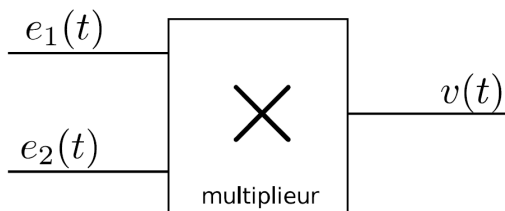


Figure 7: Multiplieur.

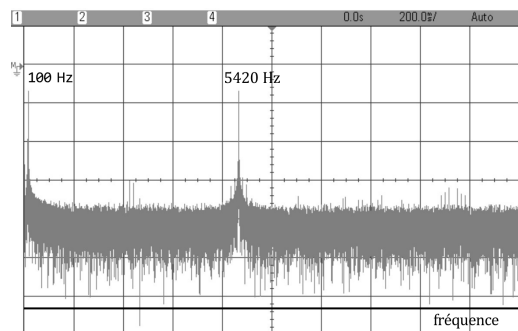


Figure 8: Relevé expérimental du spectre en amplitude de $v(t)$, en sortie du multiplieur.

23. Le spectre du signal $v(t)$ comporte deux composantes, l'une de fréquence f_1 et l'autre de fréquence f_2 . En écrivant $v(t)$ d'une autre manière, établir l'expression de f_1 et de f_2 en fonction de f_0 et de Δf .

24. Donner également les expressions des amplitudes de chacune des deux composantes du spectre.
25. La Figure 8 est un enregistrement du spectre en amplitude de $v(t)$. En déduire les valeurs de Δf et de f_0 dans ce cas-ci.

2.3 Filtre passe-bas (11 pt)

L'avant dernière étape est de réaliser un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante basse fréquence du signal $v(t)$. On considère ainsi le circuit de la Figure 9. On note $s(t)$ sa sortie.

On note $\underline{v}(t)$ et $\underline{s}(t)$ les grandeurs complexes associées à $v(t)$ et $s(t)$.

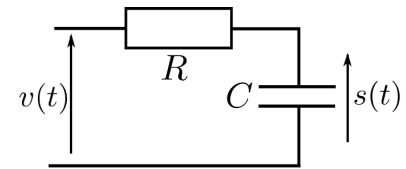


Figure 9: Circuit RC étudié dans cette sous-partie.

26. Par une étude asymptotique du circuit, montrer qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas.
27. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}}$ de ce circuit, en fonction de R et de C (et de la pulsation ω du signal d'entrée).
28. Établir l'expression de $|\underline{H}|$, ainsi que l'expression du déphasage $\Delta\phi$ induit par ce filtre, en fonction de R , C et ω .
29. Démontrer, en partant de l'expression de \underline{H} ou de $|\underline{H}|$, que l'asymptote haute fréquence dans le diagramme de Bode en amplitude a pour pente -20dB/decade .

On donne dans la Figure 10 le diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

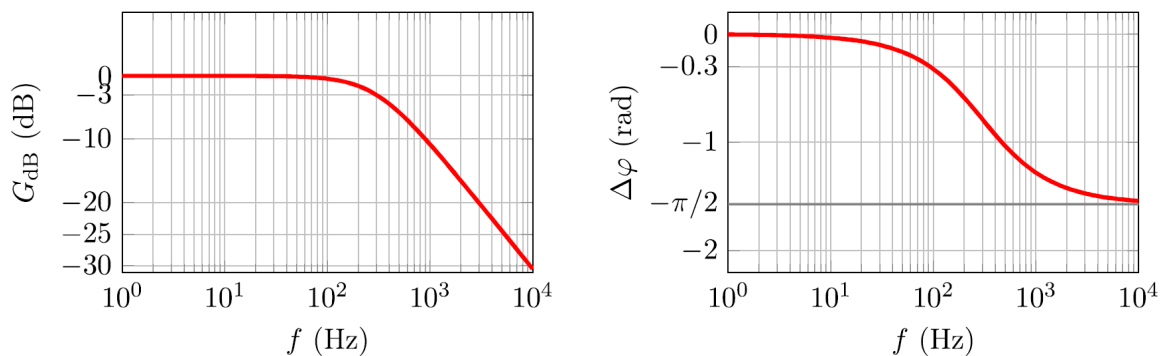


Figure 10: Diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

30. À l'aide de la Figure 10, estimer la valeur de la fréquence de coupure de ce filtre.

On considère en entrée du filtre le signal

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi ft)$$

avec $E_0 = 1\text{V}$ et $f = 100\text{Hz}$. Pour les deux questions qui suivent, on ne raisonne pas à partir des expressions théoriques de $|\underline{H}|$ ou de $\arg(\underline{H})$, mais en utilisant la Figure 10.

31. Donner l'expression du signal de sortie qui correspond à $e(t)$ en entrée. On donnera les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase à l'origine de ce signal de sortie.
32. Même question, avec cette fois une fréquence $f = 5\text{kHz}$ pour le signal d'entrée (et toujours $E_0 = 1\text{V}$).

2.4 Chaîne complète (6 pt)

Le passage d'un wagon modifie l'expression de l'inductance L du circuit RLC, qui devient $L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$, avec L_1 la valeur initiale de L , L_2 une inductance liée au wagon mobile et M un coefficient de couplage entre L_1 et L_2 .

La fréquence d'oscillation du circuit RLC passe alors de $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}}$ à $f_0 + \Delta f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

33. Montrer que si $M \ll \sqrt{L_1L_2}$, alors $\Delta f = f_0 \times \frac{M^2}{2L_1L_2}$.

Le signal de fréquence $f_0 + \Delta f$, précédemment noté $e_1(t)$, est envoyé dans le multiplieur. La sortie $v(t)$ du multiplieur est envoyée dans le filtre passe-bas (cf. Figure 11). Le signal $e_2(t)$ est le signal de référence de fréquence f_0 .

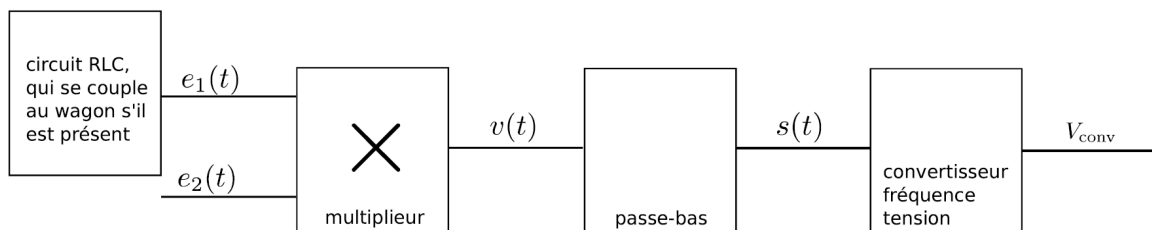


Figure 11: Chaîne complète de traitement du signal.

34. Indiquer alors l'expression du signal $s(t)$ observé en sortie du filtre passe-bas, en supposant que celui-ci coupe entièrement tout signal de fréquence supérieure ou égale à f_0 . On notera son amplitude S_0 sans chercher à la déterminer.

L'écart Δf varie lors du passage du wagon. Pour simuler ceci, nous remplaçons le wagon par une bobine, que l'on fait passer devant la bobine du circuit 1 (Figure 12 à gauche). Il en résulte le signal $s(t)$ enregistré sur la Figure 12 à droite.

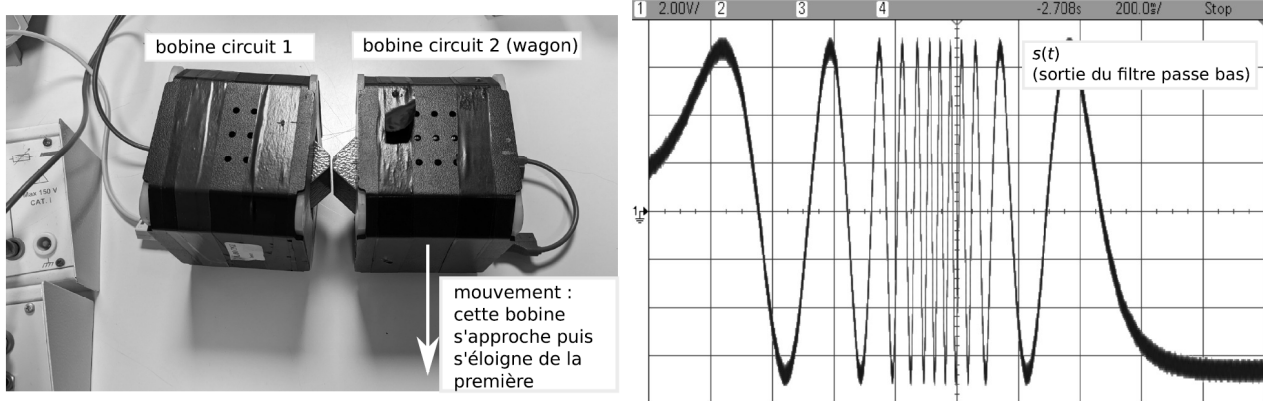


Figure 12: Gauche : passage de la bobine L_2 à proximité de la bobine L_1 . Droite : signal correspondant en sortie du filtre passe-bas.

Le convertisseur fréquence-tension délivre une tension V_{conv} dont la valeur est proportionnelle à la fréquence du signal envoyé sur son entrée. On note α la constante de proportionnalité.

35. Donner l'expression de cette tension en fonction, entre autre, de M .
36. Conclure en traçant l'allure de $V_{\text{conv}}(t)$ lors du passage d'un wagon, sachant qu'un tel passage a pour conséquence de faire augmenter puis diminuer M .

3 Trajectoire de la sonde Juno (22 pt)

Adapté du concours e3a - MP (2021)

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_l est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il "s'échappe".

37. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini sans vitesse), déterminer la vitesse de libération v_l en fonction de \mathcal{G} et d'autres grandeurs. Calculer numériquement v_l .

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une orbite elliptique de 53 jours. On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J . En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

38. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique.
39. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique est constant au cours du temps. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la Figure 13.

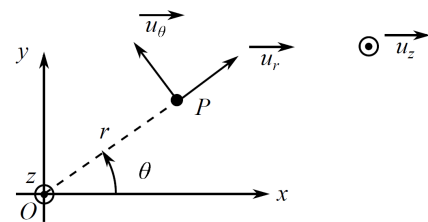


Figure 13: Paramétrage cylindrique.

40. Déterminer les expressions du vecteur position \vec{r} et du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
41. On définit le vecteur \vec{C} par $\vec{C} = \vec{L}_{O,P/\mathcal{R}}/m$. En exprimant \vec{C} dans la base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$.
42. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + U_{eff}(r) \quad \text{avec} \quad U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_J}{r}.$$

Justifier que \mathcal{E}_m se conserve.

43. Tracer l'allure de $U_{eff}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de \mathcal{E}_m . On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.
44. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde. Exprimer, sans justifier, \mathcal{E}_m en fonction de a . En déduire une première équation liant la distance minimale r_{min} , la distance maximale r_{max} et a . Montrer également que r_{min} et r_{max} vérifient la relation suivante :

$$r_{min}r_{max} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}.$$

Ces deux relations permettent de déterminer r_{min} et r_{max} , ce que l'on ne demande pas.

FIN DU SUJET