

# Chapitre 1 - Systèmes en rotation

Au premier semestre, nous nous avons commencé notre étude des mouvements et des interactions entre objets en nous limitant à des **objets ponctuels**. Nous allons maintenant nous intéresser à des objets possédant un certain volume : **les solides**. Nous n'aborderons pas les fluides, qui possèdent un volume non rigide.

Dans le cas d'un solide ou d'un fluide, l'infinité de points qui les constituent n'ont, en général, pas la même trajectoire. **Pour décrire une trajectoire quelconque, on peut toujours la découpler en une translation et en une rotation.** Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour décrire les translations : la masse  $m$ , la quantité de mouvement  $\vec{p}$  et la force  $\vec{F}$ . Mais pour décrire convenablement les rotations il nous faut introduire de nouvelles grandeurs similaires à celles utilisées pour la description des translations.

Après avoir introduit ces grandeurs dans le cas simple d'un objet ponctuel, et les avoir utilisées pour décrire les mouvements d'un objet ponctuel dans un champ de gravitation, nous pourrons mener l'étude des mouvements des solides.

## Leçon I. Rotation d'un objet ponctuel

Dans cette première leçon, nous allons introduire, dans le cas du point matériel, système déjà étudié, deux des trois grandeurs nécessaires à la description des rotations : **le moment cinétique  $\vec{L}$  et le moment d'une force  $\mathcal{M}(\vec{F})$ .**

### I.1. Vecteur moment cinétique

Le moment cinétique est une notion abstraite qu'on peut relier à un concept un peu plus concret que nous avons tous déjà rencontré : **le bras de levier**.

#### I.1.a Bras de levier

Prenons deux exemples.

- Soit un gros rocher de masse  $M$ . Vous devez fabriquer un levier à partir d'une barre à mine et d'un rondin pour le déplacer. **Où placer le rondin afin d'exercer sur l'extrémité A de la barre à mine la plus petite force possible pour déplacer le rocher ?**
- Soit un manège de rayon  $R$ . Au point A de la périphérie du manège, vous imposez une force  $\vec{F}$  sur le manège pour le faire tourner. **Quelle direction choisirez-vous pour mettre en rotation le manège le plus efficacement possible ?**

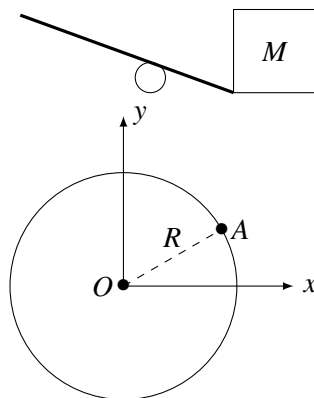


FIGURE 1.1 – Exemples de mise en rotation

Dans le cas du rocher, le déplacement sera d'autant plus facile si l'axe de rotation est éloigné du point d'application de la force.

Dans le cas du manège on constate qu'une force colinéaire au rayon du manège ne provoque aucun mouvement, mais qu'une force perpendiculaire au rayon du manège le met en rotation le plus efficacement possible.

Dans les deux cas nous avons étudié le **bras de levier** de la force exercée sur le manège et sur la barre à mine utilisée comme un levier.

Pour obtenir le bras de levier  $d$  d'une force  $\vec{F}$ , il faut

- déterminer l'axe de rotation, noté  $\Delta$ , autour duquel tourne l'objet sur lequel
- tracer la droite d'action de la force  $\vec{F}$  (droite infinie colinéaire à la force)
- trouver la distance la plus courte entre la droite d'action et l'axe de rotation, soit le segment passant par l'axe de rotation  $\Delta$  et perpendiculaire à la droite d'action, il s'agit du bras de levier  $d$  de la force.

Si on représente les bras de levier  $d_1$  et  $d_2$  d'une même force  $\vec{F}$  dans le cas du rocher, on constate bien que le bras de levier le plus grand permet une mise en rotation plus efficace.



FIGURE 1.2 – Exemples de mise en rotation pour un levier

Si on représente les bras de levier  $d_1$  et  $d_2$  de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dans le cas du manège, on constate bien que le bras de levier le plus grand permet une mise en rotation plus efficace. Dans ce cas le bras de levier  $d_1$  correspond au rayon  $R$  du manège.

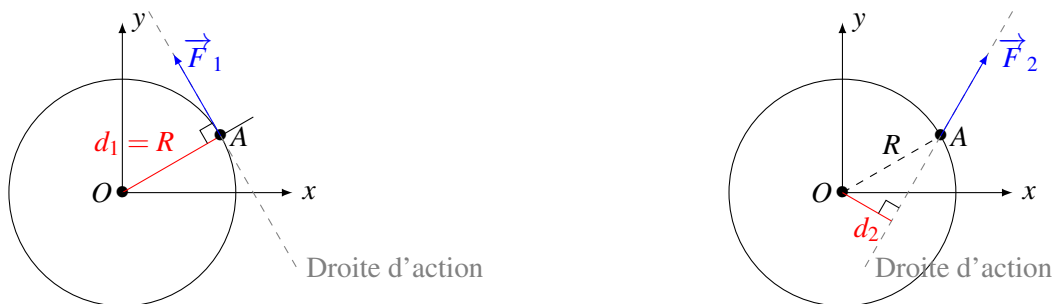


FIGURE 1.3 – Exemples de mise en rotation pour un manège

**Plus le bras de levier est important et plus la capacité d'un objet à entrer en rotation est importante.**

On peut voir le bras de levier comme la longueur "efficace" d'un levier permettant la rotation d'un objet.

### 1.1.b Moment cinétique par rapport à un point

Nous allons définir le vecteur moment cinétique et le relier à la notion de bras de levier.

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$ , de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. Sa quantité de mouvement du point est

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$

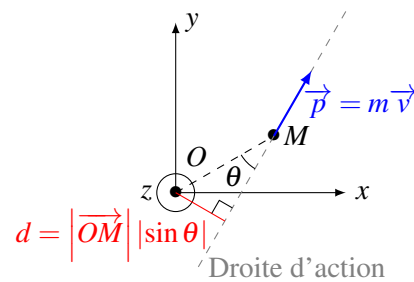


FIGURE 1.4 – Schéma de situation.

### ♥ Définition

**Le moment cinétique** noté  $\vec{L}_O$  d'un point  $M$  **par rapport à un point**  $O$  est le vecteur défini par le produit vectoriel

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}.$$

La valeur du moment cinétique s'exprime en  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1} = \text{J.s}$ .

Le moment cinétique dépend de la vitesse  $\vec{v}$  du point, donc du référentiel choisi, et de la position du point  $O$  choisi dans ce référentiel.

Si on étudie **la norme du produit vectoriel** il vient, d'après la définition du produit vectoriel que

$$|\vec{L}_O| = |\vec{OM}| \times m|\vec{v}| |\sin \theta|$$

avec  $\theta$  l'angle entre le vecteur  $\vec{OM}$  et la vitesse  $\vec{v}$ .

On reconnaît le bras de levier  $d$  : il s'agit du produit  $|\vec{OM}| |\sin \theta|$ , ainsi

$$|\vec{L}_O| = md|\vec{v}|$$

**la norme du moment cinétique est proportionnelle au bras de levier** : plus le bras de levier est important plus le module du moment cinétique est important.

Pour obtenir **la direction du moment cinétique**  $\vec{L}_O$ , il faut déterminer la droite perpendiculaire au plan contenant les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{p}$ .

**Le sens du moment cinétique** est obtenu à partir de **la règle du tire-bouchon** comme illustré Figure 1.5 : on fait tourner les doigts de la main droite, excepté le pouce, dans le sens du vecteur  $\vec{OM}$  allant vers le vecteur  $\vec{p}$ , le sens donné par le pouce, perpendiculaire aux autres doigts, donne le sens du moment cinétique  $\vec{L}_O$ .

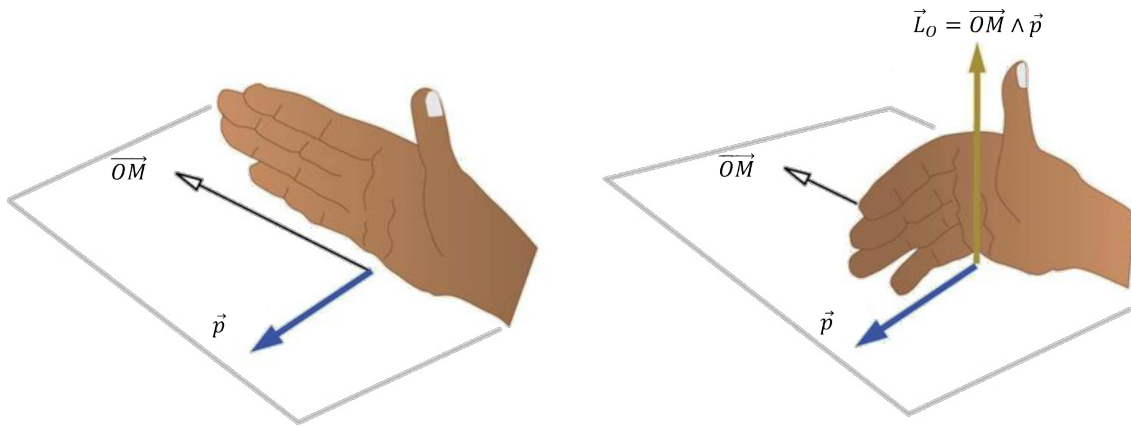


FIGURE 1.5 – Règle du tire-bouchon.

En comparant le sens du moment cinétique avec le sens du vecteur unitaire de la base choisie, par exemple  $\vec{u}_z$ , on détermine la valeur du moment cinétique : positif si les sens sont les mêmes, négatifs s'ils sont opposés.

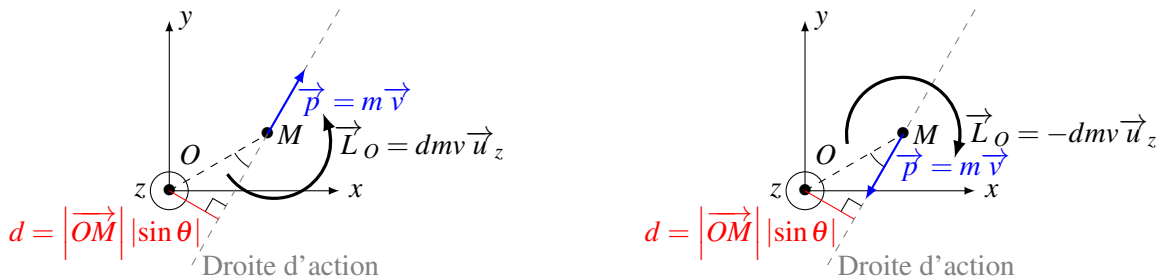


FIGURE 1.6 – Différents moments cinétiques.

### Quelques propriétés du moment cinétique par rapport à un point $M$

- Si le mouvement du point  $M$  est plan et que  $O$  appartient au plan du mouvement, le vecteur moment cinétique  $\vec{L}_O$  est perpendiculaire à ce plan à tout instant.
- Si le mouvement du point  $M$  est rectiligne et inscrit sur une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$ , le vecteur moment cinétique  $\vec{L}_O$  est nul à tout instant car les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaire à tout instant. On peut aussi voir que dans ce cas, le bras de levier  $d$  est nul car la droite d'action de la vitesse passe par  $O$ .
- On peut montrer que le vecteur moment cinétique dépend bien du point par rapport auquel on le calcule. Si on calcule le moment cinétique par rapport à un point  $A$  il vient que

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}.$$

On peut utiliser la relation de Chasles sur le vecteur  $\vec{AM}$  afin de faire apparaître le vecteur  $\vec{BM}$  tel que

$$\vec{L}_A = (\vec{AB} + \vec{BM}) \wedge \vec{p}$$

soit

$$\vec{L}_A = \vec{AB} \wedge \vec{p} + \vec{BM} \wedge \vec{p}$$

donc

$$\vec{L}_A = \vec{AB} \wedge \vec{p} + \vec{L}_B.$$

Il n'y a pas égalité des moment cinétiques pour deux points différents par rapport auxquels on les calcule.

### 1.1.c Moment cinétique par rapport à un axe orienté $\Delta$

#### ♥ Définition

**Le moment cinétique de  $M$  par rapport à un axe orienté  $\Delta = (0, \vec{u}_\Delta)$**  est la projection orthogonale de  $\vec{L}_O$  sur l'axe  $\Delta$

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Considérons un axe  $\Delta = (0, \vec{u}_\Delta)$ , et de nouveau deux points  $A$  et  $B$  de cet axe. Le moment cinétique d'un point  $M$  quelconque par rapport au point  $A$  est, d'après la définition donnée plus tôt

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}.$$

ou, comme on l'a montré

$$\vec{L}_A = \vec{AB} \wedge \vec{p} + \vec{L}_B.$$

Si on applique le produit scalaire avec le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  sur chacun des termes de l'équation précédente, il vient que

$$\vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{AB} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta + \vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Or comme les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la droite  $\Delta = (0, \vec{u}_\Delta)$ , le vecteur  $\vec{AB}$  est colinéaire au vecteur  $\vec{u}_\Delta$ , et donc le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{p}$  est perpendiculaire à  $\vec{u}_\Delta$ , donc le produit scalaire de ces deux termes est nul, soit

$$\vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_B \cdot \vec{u}_\Delta = L_\Delta.$$

**Le point de l'axe choisi pour calculer le moment cinétique  $L_\Delta$  d'un point par rapport à un axe n'a pas d'importance.**

## 1.2. Moment d'une force

On vient de voir que pour une rotation on peut utiliser le moment cinétique d'un point  $M$  par rapport à un point  $O$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}.$$

On constate un lien direct entre la grandeur cinétique  $\vec{p}$  caractéristique de mouvements de translation, et de la grandeur cinétique  $\vec{L}_O$  caractéristique de mouvements de rotation.

De la même manière, on peut introduire une nouvelle grandeur dynamique caractéristique de mouvements de rotation directement liée à la grandeur dynamique qui est la force  $\vec{F}$  caractéristique de mouvements de translation. Il s'agit du **moment d'une force**  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ .

### 1.2.a Définition

#### ♥ Définition

**Le moment en  $O$  d'une force  $\vec{F}$**  s'appliquant en  $M$  noté  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  est le vecteur défini par le produit vectoriel

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

La valeur du moment cinétique s'exprime en  $\text{N.m} = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2} = \text{J}$ .

À l'instar du moment cinétique la notion de bras de levier revient dans la définition du moment d'une force. Si on étudie **la norme du moment d'une force** il vient, d'après la définition du produit vectoriel que

$$|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})| = |\vec{OM}| \times |\vec{F}| |\sin \theta|$$

avec  $\theta$  l'angle entre le vecteur  $\vec{OM}$  et la force  $\vec{F}$ .

On reconnaît le bras de levier  $d$  : il s'agit du produit  $|\vec{OM}| |\sin \theta|$ , ainsi

$$|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})| = d |\vec{F}|$$

la norme du moment d'une force est proportionnelle au bras de levier : plus le bras de levier est important plus le module du moment d'une force est important.

Pour obtenir **la direction du moment d'une force**  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ , il faut déterminer la droite perpendiculaire au plan contenant les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{F}$ .

**Le sens du moment d'une force** est obtenu à partir de **la règle du tire-bouchon** : on fait tourner les doigts de la main droite, excepté le pouce, dans le sens du vecteur  $\vec{OM}$  allant vers le vecteur  $\vec{F}$ , le sens donné par le pouce, perpendiculaire aux autres doigts, donne le sens du moment d'une force.

Le moment des forces par rapport à un point est **une grandeur additive**. Si on considère deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  s'appliquant sur un point  $M$ , il vient que le moment de la résultante des forces en  $O$  est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{OM} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_2$$

donc

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_1) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_2).$$

### 1.2.b Moment d'une force par rapport à un axe orienté $\Delta$

#### ♥ Définition

**Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$  est la projection orthogonale de  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  sur l'axe  $\Delta$**

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

De même que pour le moment cinétique par rapport à un axe orienté, le moment d'une force par rapport à un axe orienté est indépendant du point de l'axe par rapport auquel on le calcule.

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$  est nul lorsque

- la force  $\vec{F}$  est colinéaire au vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  : le moment de  $\vec{F}$  par rapport à un point de l'axe est perpendiculaire à  $\vec{F}$ , donc perpendiculaire à  $\vec{u}_\Delta$ , donc le produit scalaire du moment  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$  et  $\vec{u}_\Delta$  est nul
- la droite d'action de la force  $\vec{F}$  coupe  $\Delta$  : le bras de levier est nul.

### 1.3. Théorème du moment cinétique

On étudie un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Le point  $M$  est soumis à un ensemble de force  $\vec{F}_i$ . On note  $O$  un point fixe et  $\Delta$  une droite orientée fixe contenant  $O$ . On choisit l'axe  $(Oz)$  tel que  $\Delta = (Oz)$ . On note le moment cinétique  $\vec{L}_O$  de  $M$  par rapport à  $O$ , et  $L_{(Oz)}$  le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe  $\Delta = (Oz)$ . On note également  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$  le moment d'une force  $\vec{F}_i$  par rapport à  $O$  et  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_i)$  son moment par rapport à l'axe  $\Delta = (Oz)$ .

### 1.3.a Démonstration

Étudions la variation au cours du temps du moment cinétique  $\vec{L}_O$  de  $M$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Le principe fondamental de la dynamique implique que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

donc

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i$$

soit

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i (\vec{OM} \wedge \vec{F}_i)$$

donc

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i).$$

#### ♥ Définition

Le théorème du moment cinétique énonce que la dérivée temporelle du moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point  $O$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i).$$

### 1.3.b Conservation du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique est intéressant à exploiter lorsque la somme des moment des forces par rapport à  $O$  s'annule. Cela correspond à

$$\sum_i (\vec{OM} \wedge \vec{F}_i) = \vec{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Dans cette situation, le moment cinétique est conservé

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{L}_O = \vec{cst}.$$

En pratique, cette situation correspond à deux cas.

- La somme des force est nulle à tout instant, soit

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Le point  $M$  est donc isolé ou pseudo-isolé : il a une trajectoire rectiligne uniforme ou est immobile.

- La résultante des forces  $\sum_i \vec{F}_i$  est colinéaire au vecteur  $\vec{OM}$  à tout instant. La droite d'action de la résultante des forces passe constamment par  $O$ , le bras de levier est nul.

Lorsqu'une force possède une droite d'action qui passe constamment par le point par rapport auquel on calcule son moment cinétique, on la qualifie de **force centrale**.

## 1.3.c Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Étudions la dérivée temporelle de  $L_{(Oz)}$  le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe  $\Delta = (Oz)$ , soit

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z + \vec{L}_O \cdot \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

ainsi d'après le principe du moment cinétique

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \left( \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \right) \cdot \vec{u}_z = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \cdot \vec{u}_z$$

donc

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_i).$$

## ♥ Définition

Le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe énonce que la dérivée temporelle du moment cinétique de  $M$  par rapport à un axe  $\Delta = (Oz)$  est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même axe  $\Delta = (Oz)$

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_i).$$



---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
- Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.
- Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
- Conservation du moment cinétique.

### Savoir-faire

- **Relier** la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
- **Calculer** le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
- **Identifier** les cas de conservation du moment cinétique.

## Leçon II. Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

Au cours de cette leçon nous allons étudier le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative, et plus précisément à **une force newtonienne**.

### II.1. Les forces newtoniennes

Nous allons exploiter deux exemples de forces newtoniennes et en déduire la définition d'une force newtonienne.

#### II.1.a Force d'interaction gravitationnelle

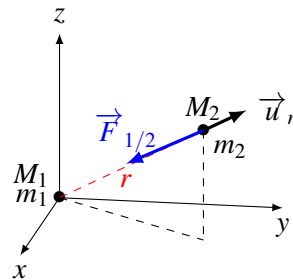


FIGURE 1.7 – Interaction gravitationnelle entre deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ .

Un point matériel  $M_1$  de masse  $m_1$  exerce sur un autre point matériel  $M_2$  de masse  $m_2$  une force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}_{1/2}$  telle que

$$\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  la constante de gravitation universelle,  $r$  la distance entre les deux points et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire portée par la droite passant par les deux points et orienté du point  $M_1$  vers le point  $M_2$ .

Comme on l'a fait dans la leçon Énergétique du point, on peut déterminer si cette force est conservative où non en calculant son travail élémentaire  $\delta W(\vec{F}_{1/2})$ , soit

$$\delta W(\vec{F}_{1/2}) = \vec{F}_{1/2} \cdot d\vec{r} \vec{u}_r = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} \vec{u}_r = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$\delta W(\vec{F}_{1/2}) = \mathcal{G} m_1 m_2 \left( -\frac{1}{r^2} dr \right)$$

or

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

ayant affaire à une dérivée droite, on peut manipuler indépendamment les différentielles, soit

$$d \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} dr$$

ainsi

$$\delta W(\vec{F}_{1/2}) = \mathcal{G} m_1 m_2 d \left( \frac{1}{r} \right)$$

et comme les termes avant la parenthèse sont des constantes, il vient que

$$\delta W(\vec{F}_{1/2}) = d\left(\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}\right).$$

Le travail élémentaire de cette force correspond bien à la différentielle d'une fonction de la variable de position  $r$ , c'est bien une **force conservative** dérivant d'une énergie potentielle définie telle que

$$\mathcal{E}_p = - \int \delta W(\vec{F}_{1/2})$$

$$\mathcal{E}_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

en fixant la valeur de l'énergie potentielle nulle à l'infini.

On peut aussi décrire la force d'interaction gravitationnelle comme l'interaction entre l'objet subissant la force, soit le point matériel  $M_2$  et un champ créé par le point matériel  $M_1$ . Ici le point matériel  $M_1$  crée un **champ gravitationnel**  $\vec{G}_1$  dans tous l'espace dont la valeur dépend de la masse  $m_1$  du point matériel  $M_1$  et de la distance  $r$  par rapport à ce point. L'objet matériel  $M_2$  est sensible à ce champ car il possède une masse  $m_2$ . On peut ainsi écrire la force de telle manière que

$$\vec{F}_{1/2} = m_2 \vec{G}_1$$

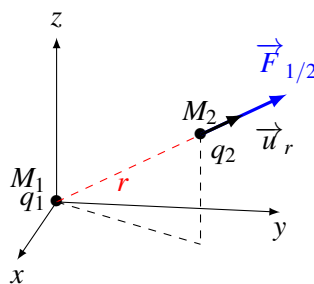
or comme

$$\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

le champ gravitationnel créé par le point matériel  $M_1$  est

$$\vec{G}_1 = -\mathcal{G} \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r.$$

### II.1.b Force d'interaction coulombienne



**FIGURE 1.8** – Interaction coulombienne entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$ .

On peut mener une étude identique mais cette fois entre deux point matériels de charges électriques  $q_1$  et  $q_2$  dans le vide. La force d'interaction coulombienne exercée par la charge  $q_1$  sur  $q_2$  est

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

La dépendance en  $1/r^2$  de la force indique, comme on l'a prouvé précédemment, que la force d'interaction coulombienne est une force conservative dérivant d'une énergie potentielle telle que

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

en fixant la valeur de l'énergie potentielle nulle à l'infini.

On peut aussi décrire la force d'interaction coulombienne comme l'interaction entre l'objet subissant la force, soit la charge  $q_2$  et un champ créé par la charge  $q_1$ . Ici la charge  $q_1$  crée **un champ électrique**  $\vec{E}_1$  dans tous l'espace dont la valeur dépend de la charge  $q_1$  et de la distance  $r$  par rapport à cette charge. La charge  $q_2$  est sensible à ce champ électrique. On peut ainsi écrire la force de telle manière que

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}_1$$

or comme

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

le champ électrique créé par la charge  $q_1$  est

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r.$$

### II.1.c Définitions

À partir de ces deux exemples de forces newtoniennes on peut définir ce que représente ce type de force.

#### ♥ Définition

Une **force newtonienne**  $\vec{F}$  est une force que l'on peut exprimer en coordonnées sphériques sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r.$$

Si le terme  $K$  est positif la force est attractive, et répulsive si  $K$  est négatif.

Cette force dérive d'une énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = -\frac{K}{r}$$

en fixant la valeur de l'énergie potentielle nulle à l'infini.

Si on considère que le vecteur  $r \vec{u}_r$  correspond au vecteur  $\vec{OM}$ , c'est à dire que l'on place le point ou la charge responsable de la force au point  $O$  et le point ou la charge subissant la force au point  $M$  on se rend compte que la droite d'action des forces newtoniennes passe constamment par le point  $O$ .

#### ♥ Définition

Une **force centrale** de centre  $O$  est une force dont la droite d'action passe constamment par  $O$ .

Les forces newtoniennes, en plus d'être des forces centrales, sont aussi des forces conservatives, ce qui constitue un type de forces particulières.

### ♥ Définition

En coordonnées sphériques, une **force centrale conservative**  $\vec{F}$  dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(r)$  telle

$$\vec{F} = F_r(r) \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{u}_r.$$

Le problème est à symétrie sphérique de centre  $O$ . La force et l'énergie potentielle ne dépendent que de la coordonnée radiale  $r$ . On dit aussi que **le champ de force est central**.

## II.2. Conséquences du caractère centrale d'une force

Dans cette section, on se concentre sur l'étude des **forces centrales** et ce que cela implique sur le mouvement du point matériel subissant ces forces.

### II.2.a Conservation du moment cinétique

Appliquons le théorème du moment cinétique sur un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  subissant une force centrale  $\vec{F}$  de centre  $O$ . Il vient que la dérivée du moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  est

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).$$

or le moment de cette force par rapport à  $O$  est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

et comme une force centrale est par définition colinéaire au vecteur  $\vec{OM}$ , le moment de cette force est nulle par rapport à  $O$  et le moment cinétique du point  $M$  par rapport à  $O$  est conservé. On peut donc le déterminer pour n'importe quel instant du mouvement de  $M$  si les valeurs de  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont connus pour un seul instant, par exemple à l'instant initial.

### ♥ Définition

Il y a **conservation du moment cinétique** par rapport au centre  $O$  d'un point  $M$  subissant une force centrale de centre  $O$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = \text{cst.}$$

**Il y a conservation en norme, en direction et en sens. Le moment cinétique est, dans ce cas, une intégrale première du mouvement.**

### II.2.b Planéité de la trajectoire

Considérons toujours le point  $M$ . À l'instant initial de l'étude de son mouvement, il se situe en  $M_0$  et possède une vitesse  $\vec{v}_0$ . Son moment cinétique est donc

$$\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0.$$

Le moment cinétique est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  défini par les vecteurs  $\vec{OM}_0$  et  $\vec{v}_0$ .

Comme le moment cinétique est conservé, il est constamment perpendiculaire à ce plan  $\mathcal{P}$  contenant le point  $O$ .

À un autre instant  $t$  le moment cinétique est tel que

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}.$$

Par définition du produit vectorielle,  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont perpendiculaires à  $\vec{L}_O$ , ils sont dans le plan  $\mathcal{P}$  à n'importe quel instant  $t$ .

### ♥ Définition

**La conservation du moment cinétique** d'un point matériel  $M$  implique que **son mouvement est plan**.

#### II.2.c Loi des aires

Considérons toujours le point  $M$ . Ayant montré que son mouvement est plan, on peut récrire son vecteur position  $\vec{OM}$  dans la base polaire  $(\rho, \theta, z)$

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

il a donc une vitesse  $\vec{v}$  telle que

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

et un moment cinétique  $\vec{L}_O$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} = \rho \vec{u}_\rho \wedge m (\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m \rho \vec{u}_\rho \wedge \dot{\rho} \vec{u}_\rho + m \rho \vec{u}_\rho \wedge \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &= m \rho^2 \dot{\theta} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Comme il y a conservation en norme, en direction et en sens, il vient que

$$|\vec{L}_O| = m \rho^2 \dot{\theta} = \text{cst.}$$

On considère des objets dont la masse est constante, donc la quantité  $\rho^2 \dot{\theta}$  est conservée, on nomme cette quantité **constante des aires** et on la note  $\mathcal{C}$  telle que

$$\mathcal{C} = \rho^2 \dot{\theta}.$$

On peut faire le lien entre cette quantité et une autre que l'on peut faire apparaître en étudiant un mouvement elliptique d'un point  $M$  soumis à une force centrale.

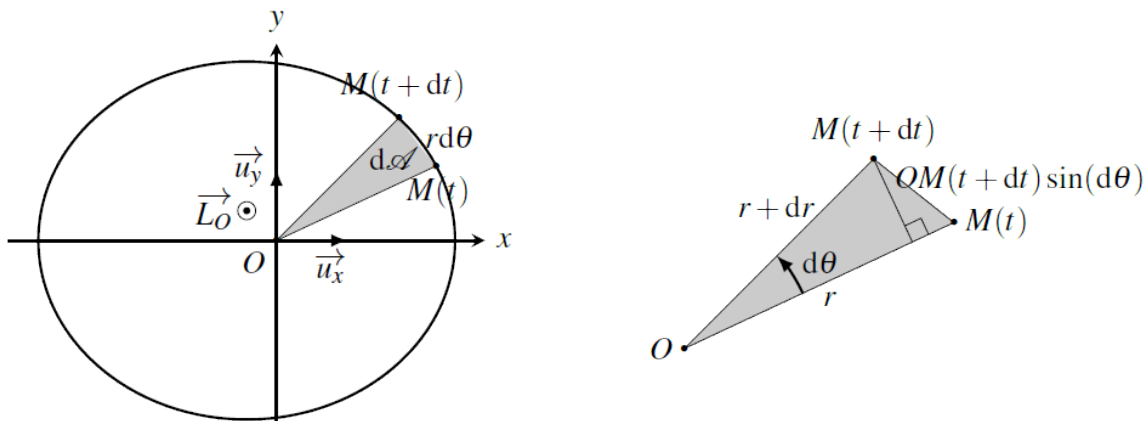


FIGURE 1.9 – Aire  $d\mathcal{A}$  balayée par le rayon vecteur  $\vec{OM}$  pendant  $dt$ .

Durant la durée infinitésimale  $dt$  le point  $M$  est passé d'une position  $M(t)$  à  $M(t + dt)$  et il a balayé l'aire infinitésimale  $d\mathcal{A}$ . Durant une durée  $dt$  assez courte, la coordonnée angulaire du point  $M$  a varié d'une valeur  $d\theta$  faible.

On peut approximer le côté  $M(t)M(t + dt)$  de l'aire  $d\mathcal{A}$  balayée par le point  $M$  durant  $dt$  au côté d'un triangle rectangle, soit

$$M(t)M(t + dt) \approx OM(t) \sin(d\theta) = \rho \sin(d\theta)$$

comme l'angle  $d\theta$  est faible on peut utiliser le développement limité de la fonction sinus au premier order en 0, soit

$$M(t)M(t + dt) \approx \rho d\theta.$$

Ainsi l'aire infinitésimale  $d\mathcal{A}$  est approximé à celle d'un triangle rectangle, soit

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} OM(t) \times \rho d\theta = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$$

ou encore

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} dt$$

on reconnaît la constante des aires  $\mathcal{C}$ , soit

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{C} dt.$$

Une autre constante apparaît alors

$$\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} \mathcal{C}$$

il s'agit de la **vitesse aéroilaire**.

### ♥ Définition

**La conservation du moment cinétique** implique la **loi des aires** : les aires balayées par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM(t)}$  pendant des intervalles de temps égaux de durée  $\Delta t$  sont égales et valent

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{C} \Delta t = \mathcal{V} \Delta t$$

avec  $\mathcal{C} = \rho^2 \dot{\theta}$  la constante des aires et  $\mathcal{V}$  la vitesse aéroilaire, soit l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur.

### II.3. Conséquence du caractère conservatif d'une force centrale et conservative

Dans cette section, on se concentre sur l'étude des forces **centrales et conservatives** et ce que cela implique sur le mouvement du point matériel subissant ces forces.

On a vu dans la leçon Énergétique du point le théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = W(\overrightarrow{F}^{NC})$$

dans le cas du point  $M$  étudié, il n'est soumis qu'à une force conservative, il vient donc que

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$$

$$\mathcal{E}_m = \text{cst}$$

soit

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} mv^2 + E_p = \text{cst}.$$

**L'énergie mécanique est, dans ce cas, une intégrale première du mouvement.**

### 11.3.a Énergie potentielle effective

Développant l'expression de l'énergie mécanique d'un point  $M$  soumis à une force centrale conservative, on a vu que la vitesse et l'énergie potentielle étaient de la forme

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \mathcal{E}_p = -\frac{K}{r}$$

soit en coordonnées polaires  $\mathcal{E}_p = -\frac{K}{\rho}$  ainsi

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta)^2 - \frac{K}{\rho}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho} \vec{u}_\rho \cdot \dot{\rho} \vec{u}_\rho + 2\dot{\rho} \vec{u}_\rho \cdot \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \cdot \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta) - \frac{K}{\rho}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{K}{\rho}$$

Le problème possède deux variables  $\rho$  et  $\theta$  correspondant aux coordonnées polaires du point  $M$ . On peut éliminer  $\dot{\theta}$  à l'aide de la constante des aires  $\mathcal{C} = \rho^2 \dot{\theta}$ , soit

$$\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{\rho^2}$$

ainsi

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \frac{\mathcal{C}^2}{\rho^4}\right) - \frac{K}{\rho}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{\rho^2} - \frac{K}{\rho}$$

On peut alors séparer l'énergie mécanique du système en deux termes, un terme dépendant de  $\dot{\rho}$  et un terme dépendant de  $\rho$ . Le premier est l'énergie cinétique liée au mouvement radiale

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$$

et le deuxième s'apparente à une énergie potentielle

$$\frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{\rho^2} - \frac{K}{\rho}$$

on l'appelle **l'énergie potentielle effective**.

#### ♥ Définition

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale et conservative peut être décrit comme **un mouvement conservatif à un degré de liberté, la coordonnée radiale  $\rho$** , avec une énergie potentielle effective notée  $\mathcal{E}_{p_{eff}}$  définie telle que

$$\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{\rho^2} - \frac{K}{\rho}.$$



### 11.3.b Étude qualitative du mouvement radial

De la même manière qu'on l'a fait dans la leçon Énergétique du point, on peut obtenir des informations sur le mouvement du point  $M$  soumis à une force centrale conservatrice en étudiant la courbe de son énergie potentielle effective  $\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho)$  en fonction de coordonnée  $\rho$  pour différentes valeurs de son énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$ .

Son énergie mécanique est telle que

$$\text{cst} = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho)$$

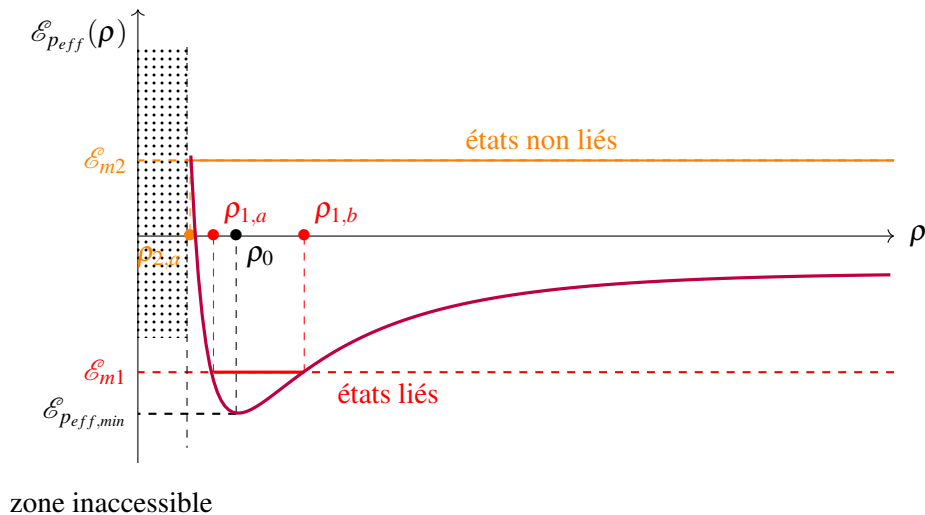
or comme  $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 > 0$  il vient que

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho) > 0$$

soit

$$\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho).$$

La courbe d'énergie potentielle effective d'un point  $M$  soumis à une force centrale effective est présentée Figure 1.10.



**FIGURE 1.10** – Énergie potentielle effective  $\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho)$  du point matériel  $M$  avec une énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m1}$ ,  $\mathcal{E}_{m2}$  et  $\mathcal{E}_{m3}$ .

On peut voir grâce à la courbe que l'énergie potentielle effective représentée est de la forme

$$\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{\rho^2} - \frac{K}{\rho}$$

avec  $K > 0$ , la force est donc attractive.

De plus, pour  $\rho \rightarrow \infty$   $\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho) = 0$ . Comme  $\rho \rightarrow \infty$  est la coordonnée limite entre les états liés et les états non liés du point  $M$ ,  $\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho) = 0$  est la valeur de l'énergie potentielle effective limite entre les états liés et les états non liés du point  $M$ .

On peut alors définir quatre possibilités pour le mouvement du point  $M$  décrites par le courbe de potentiel effectif.

- Si  $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{p_{eff, \min}}$  le mouvement est impossible car l'énergie mécanique doit être supérieure à l'énergie potentielle effective.

- Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p_{eff,min}}$  alors il n'y a qu'une valeur possible pour la coordonnée  $\rho = \rho_0$  : **le mouvement est circulaire**. De plus il vient que

$$\mathcal{C} = \rho_0^2 \dot{\theta} = \text{cst}$$

or comme  $\rho_0 = \text{cst}$  il vient que

$$\dot{\theta} = \text{cst}$$

le mouvement est **circulaire et uniforme**.

- Si  $\mathcal{E}_{p_{eff,min}} < \mathcal{E}_m < 0$  l'ensemble des coordonnées  $\rho$  est accessible sur un intervalle borné compris entre les position  $\rho_{1,a}$  et  $\rho_{1,b}$ . Le système est dans **un état lié**, il reste dans le puit de potentiel duquel dérive la force dont il est soumis. **Le mouvement décrit une ellipse** et la distance du point  $M$  au centre de la force varie entre  $\rho_{1,b}$  au périhélie, et  $\rho_{1,a}$  à l'apogée.
- Si  $0 < \mathcal{E}_m$  l'ensemble des coordonnées  $\rho$  est accessible sur un intervalle non borné compris entre  $\rho_{2,a}$  et  $\infty$ . Le système est dans **un état non lié ou un état de diffusion**. Le mouvement décrit une hyperbole.

## II.4. Mouvement des satellites et des planètes

La première étude des mouvements à force centrale conservative est l'étude des trajectoires des planètes du système solaire. Entre 1609 et 1618, Johannes Kepler a résumé en trois lois l'analyse de ces mouvements.

Nous allons les retrouver en étudiant la trajectoire circulaire d'un objet soumis à une force centrale conservative, et plus particulièrement un satellite géostationnaire.

### II.4.a Lois de Kepler

#### ♥ Définitions

- **Première loi de Kepler ou lois des orbites** : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers.
- **Deuxième loi de Kepler ou lois des aires** : les aires balayées par le segment  $[SP]$ , où  $S$  représente le centre du Soleil et  $P$  le centre de la planète, pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
- **Troisième loi de Kepler ou lois des périodes** : le carré de la période de révolution  $T$  d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe  $a$  de sa trajectoire elliptique

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cst.}$$

### II.4.b Étude d'une trajectoire circulaire

Grâce à l'étude énergétique, nous avons déjà mis en évidence la première loi de Kepler : un point  $M$  soumis à une force centrale conservative a une trajectoire elliptique pour certaines valeurs de son énergie mécanique.

Prenons le cas particulier d'un point  $M$  de masse  $m$  soumis à une force d'interaction gravitationnelle due à un objet de masse  $m_A$  situé en  $O$  du repère et décrivant une trajectoire circulaire de rayon  $\rho_0$ .

Le vecteur position du point  $M$  est

$$\overrightarrow{OM} = \rho_0 \vec{u}_\rho$$

le vecteur vitesse est

$$\vec{v} = \rho_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

et le vecteur accélération est

$$\vec{a} = -\rho_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + \rho_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

soit

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{\rho_0} \vec{u}_\rho + \rho_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

D'après le principe fondamental de la dynamique il vient que

$$m \vec{a} = -\mathcal{G} \frac{mm_A}{\rho_0^2} \vec{u}_\rho$$

et si on projette cette équation sur le vecteur unitaire  $\vec{u}_\rho$  il vient que

$$m \vec{a} \cdot \vec{u}_\rho = -\mathcal{G} \frac{mm_A}{\rho_0^2} \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho$$

$$m \left( -\frac{v^2}{\rho_0} \vec{u}_\rho + \rho_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta \right) \cdot \vec{u}_\rho = -\mathcal{G} \frac{mm_A}{\rho_0^2}$$

$$\frac{v^2}{\rho_0} = \mathcal{G} \frac{m_A}{\rho_0^2}$$

$$v^2 = \mathcal{G} \frac{m_A}{\rho_0}.$$

On constate que la norme de la vitesse est donc constante

$$v = \sqrt{\mathcal{G} \frac{m_A}{\rho_0}}.$$

Le mouvement est uniforme comme on l'avait prouvé en utilisant la conservation du moment cinétique qui nous avait amené à la loi des aires.

De plus, la norme de **la vitesse d'un satellite en orbite circulaire en orbite autour d'un astre est fonction de la masse  $m_A$  de l'astre et du rayon de l'orbite.**

On continue l'étude d'un mouvement circulaire. La période  $T$  de révolution du point  $M$  est la durée que met le point pour parcourir l'orbite de longueur  $2\pi\rho_0$  à la vitesse  $v$ , soit

$$T = \frac{2\pi\rho_0}{v} = 2\pi\rho_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\mathcal{G}m_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_0^3}{\mathcal{G}m_A}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\rho_0^3}{\mathcal{G}m_A}$$

soit

$$\frac{T^2}{\rho_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_A}.$$

Or dans un cercle de rayon  $\rho_0$  est un cas particulier d'ellipse de demi-grand axe  $a$ , donc on constate que nous avons démontré la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire

$$\frac{T^2}{\rho_0^3} = \text{cst.}$$

## 11.4.c Satellite géostationnaire

## ♥ Définition

Un **satellite géostationnaire** est un satellite artificiel qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Il est donc fixe dans le référentiel terrestre.

Sa vitesse angulaire est égale à la vitesse angulaire de la Terre  $\Omega$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sidéral}}}$$

avec  $T_{\text{sidéral}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$  la période d'un jour sidéral, c'est-à-dire la durée nécessaire à la Terre pour tourner sur elle-même, à comparer avec  $T_{\text{solaire}} = 24 \text{ h}$  la période d'un jour solaire, c'est-à-dire la durée entre deux alignements consécutifs d'un point de la Terre avec le centre du Soleil et le centre du Soleil.

La vitesse angulaire du satellite est constante  $\dot{\theta} = \Omega$ , et comme il est soumis à une force centrale, il suit la loi des aires  $\mathcal{C} = \rho^2 \dot{\theta} = \text{cst}$ , donc sa trajectoire est circulaire  $\rho = \text{cst}$ .

Le satellite étant soumis à la force d'interaction gravitationnelle de la Terre, il est soumis à une force centrale, son mouvement est donc plan. Comme le satellite reste constamment au-dessus du même point, le plan de son orbite coïncide avec le plan équatorial de la Terre.

---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Point matériel soumis à un champ de gravitation newtonien.
- Conservation du moment cinétique et conséquences.
- Conservation de l'énergie mécanique.
- Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
- Mouvement des satellites et des planètes.
- Lois de Kepler.
- Période de révolution.
- Satellite géostationnaire.

### Savoir-faire

- **Établir** la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.
- **Établir** les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- **Exprimer** l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
- **Exprimer** la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- **Décrire** qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- **Relier** le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- **Déterminer** les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- **Établir** et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.

## Leçon III. Cinématique d'un solide

Nous avons introduits les différentes grandeurs cinématiques permettant de faire le lien entre les mouvements d'un point matériel et les forces à l'origine de ces mouvements. Nous avons distingué deux types de mouvement les translations et les rotations.

Avant d'entamer l'étude de la cinétique et la dynamique du solide, ce qui demandera d'introduire une dernière grandeur cinématique, il nous faut définir et décrire les deux types de mouvements auxquels nous allons nous limiter : le mouvement de translation et de rotations autour d'un axe fixe d'un solide.

### III.1. Description d'un solide

#### III.1.a Définition

##### ♥ Définition

**Un solide** est un système matériel dont les points qui le constituent restent à distance constante les uns des autres.

On oppose les solides (billes de billard) aux systèmes déformables (ressort, fluides).

Pour repérer cet ensemble de points il nous faut donc plus de paramètres que ceux utilisé pour un unique point.

#### III.1.b Repérage d'un solide dans l'espace

À chaque solide on associe un repère d'espace  $\mathcal{R}_1$  orthonormé direct. On rappelle qu'un repère d'espace peut être défini à l'aide d'un solide, en choisissant un particulier de ce solide noté  $O_1$ , et trois axes particuliers de ce solide noté  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$ .

Comme le repère  $\mathcal{R}_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$  est lié au solide, **les coordonnées de chaque point du solide sont constantes dans ce repère**, même quand ce dernier est en mouvement.

Afin de décrire le mouvement du solide, on considère un référentiel d'étude avec un repère d'espace  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$  orthonormé direct dans lequel le solide est en mouvement.

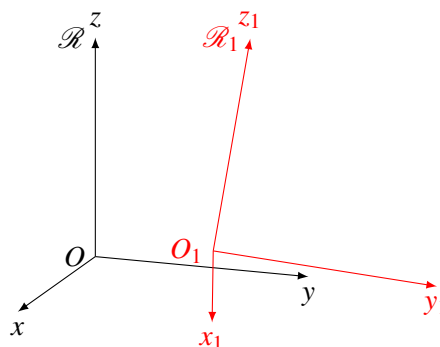


FIGURE 1.11 – Repérage d'un solide.

Dans le cas général, il faut six paramètres pour repérer un solide dans l'espace : les trois coordonnées d'un point du solide, par exemple  $O_1$ , et trois angles qui définissent l'orientation des axes  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  du repère liés au solide par rapport au référentiel d'étude de repère  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ .

### III.2. Mouvement d'un solide

#### III.2.a Description générale

Considérons deux points quelconques d'un solide, par exemple  $O_1$  et  $M$ . Si on calcule la vitesse du vecteur  $\overrightarrow{O_1M}$  dans  $\mathcal{R}_1$  il vient que

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d}{dt}(x_1 \vec{u}_{x_1} + y_1 \vec{u}_{y_1} + z_1 \vec{u}_{z_1})\right)_{\mathcal{R}_1} = x_1 \vec{u}_{x_1} + y_1 \vec{u}_{y_1} + z_1 \vec{u}_{z_1}.$$

Calculons maintenant la vitesse de ce vecteur dans le repère  $\mathcal{R}$ , dans ce cas les vecteurs de bases  $\vec{u}_{x_1}$ ,  $\vec{u}_{y_1}$  et  $\vec{u}_{z_1}$ , fixes dans  $\mathcal{R}_1$  par définition, ne sont pas forcément fixes dans  $\mathcal{R}$  soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d}{dt}(x_1 \vec{u}_{x_1} + y_1 \vec{u}_{y_1} + z_1 \vec{u}_{z_1})\right)_{\mathcal{R}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= x_1 \vec{u}_{x_1} + x_1 \left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + y_1 \vec{u}_{y_1} + y_1 \left(\frac{d\vec{u}_{y_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + z_1 \vec{u}_{z_1} + z_1 \left(\frac{d\vec{u}_{z_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= x_1 \vec{u}_{x_1} + y_1 \vec{u}_{y_1} + z_1 \vec{u}_{z_1} + x_1 \left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + y_1 \left(\frac{d\vec{u}_{y_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + z_1 \left(\frac{d\vec{u}_{z_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + x_1 \left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + y_1 \left(\frac{d\vec{u}_{y_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + z_1 \left(\frac{d\vec{u}_{z_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

On peut récrire les trois derniers termes si on s'intéresse au mouvement d'un seul vecteur de base de  $\mathcal{R}_1$  dans  $\mathcal{R}$ . Considérons le vecteur  $\vec{u}_{x_1}$  qui tourne dans  $\mathcal{R}$  tel qu'illustré sur la Figure 1.12.

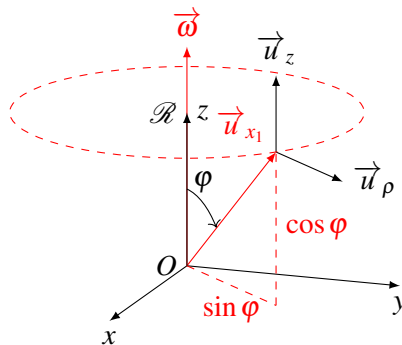


FIGURE 1.12 – Rotation du vecteur  $\vec{u}_{x_1}$  autour de l'axe  $(Ox)$  du repère  $\mathcal{R}$ .

On peut décomposer le vecteur  $\vec{u}_{x_1}$  dans la base cylindrique

$$\vec{u}_{x_1} = \sin \varphi \vec{u}_{\rho} + \cos \varphi \vec{u}_{z}.$$

La variation de  $\vec{u}_{x_1}$  au cours du temps dans le repère  $\mathcal{R}$  est donc

$$\left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sin \varphi \frac{d\vec{u}_{\rho}}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sin \varphi \dot{\theta} \vec{u}_{\theta}.$$

Calculons maintenant le produit vectoriel entre un vecteur  $\vec{\omega}$  orienté dans la direction de l'axe  $(Oz)$  autour duquel tourne  $\vec{u}_{x_1}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \sin \varphi \vec{u}_\theta.$$

On peut identifier  $\omega$  à la valeur algébrique de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  du vecteur  $\vec{u}_{x_1}$  autour de l'axe  $Oz$ . Sa valeur est positive si  $\vec{u}_{x_1}$  tourne dans le sens direct autour de  $(Oz)$ , et négative si  $\vec{u}_{x_1}$  tourne dans le sens indirect autour de  $(Oz)$  (on peut le vérifier à l'aide de la règle du tire-bouchon ou de la main droite). Ainsi on peut écrire l'égalité

$$\left( \frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x_1}$$

avec  $\vec{\omega}$  le **vecteur rotation** dont la valeur algébrique correspond à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de  $\vec{u}_{x_1}$ , la direction à l'axe de rotation et le sens par la règle du tire-bouchon ou de la main droite.

On peut généraliser cela aux deux autres vecteurs de base de  $\mathcal{R}_1$ , il vient alors que

$$\left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + x_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x_1}) + y_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y_1}) + z_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z_1})$$

$$\left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + (\vec{\omega} \wedge x_1 \vec{u}_{x_1}) + (\vec{\omega} \wedge y_1 \vec{u}_{y_1}) + (\vec{\omega} \wedge z_1 \vec{u}_{z_1})$$

$$\left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}.$$

Ceci est l'équation générale décrivant le lien entre la dérivée d'un vecteur dans un base par rapport à une autre. On peut s'en servir pour décrire les deux types de mouvements d'un solide qui nous intéressent.

### III.2.b Solide en translation

#### ♥ Définition

Un solide est **en translation** lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

Cela signifie qu'il n'y a pas de rotation, donc le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  est nul, ainsi la relation entre les dérivées de  $\vec{O_1M}$  devient

$$\left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1}$$

or comme, par définition, les points sont fixes les uns par rapport aux autres dans le solide, soit dans  $\mathcal{R}_1$ , il vient que

$$\left( \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

**Le vecteur  $\vec{O_1M}$  est aussi constant dans le repère dans lequel on étudie le mouvement.**



### ♥ Définition

En translation, tous les points d'un solide ont le même mouvement. Le mouvement d'un solide est complètement décrit par le mouvement d'un seul point. Il suffit de trois coordonnées pour décrire son mouvement.

On peut distinguer deux types de translations particulières.

- **Translation rectiligne**

Lorsque  $O_1$  décrit un mouvement rectiligne, tous les points du solide en translation ont un mouvement rectiligne. La translation du solide est qualifiée de **translation rectiligne**. Chaque point du solide décrit une portion de droite de même direction mais d'origine différente.

- **Translation circulaire**

Lorsque  $O_1$  décrit un mouvement circulaire, tous les points du solide en translation ont un mouvement circulaire. La translation du solide est qualifiée de **translation circulaire**. Chaque point du solide décrit une arc de cercle de même rayon mais de centres différents.

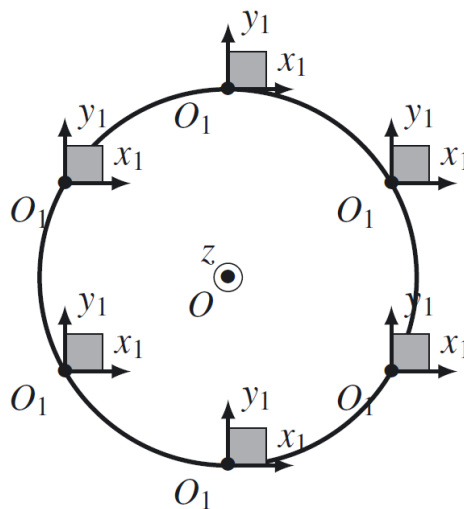


FIGURE 1.13 – Translation circulaire.

### III.3. Solide en translation autour d'un axe fixe

#### ♥ Définition

Un solide est **en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$**  s'il existe une unique droite  $\Delta$  immobile à la fois par rapport au solide et au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Par définition, les points sont fixes les uns par rapport aux autres dans le solide, soit dans  $\mathcal{R}_1$ , il vient que

$$\left( \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

avec  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation colinéaire à l'axe  $\Delta$ .

**♥ Définition**

En rotation autour d'un axe fixe, tous les points d'un solide ont la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , la même accélération angulaire  $\ddot{\theta}$ . Le mouvement d'un solide est complètement décrit par la donnée du déplacement angulaire d'un seul point.

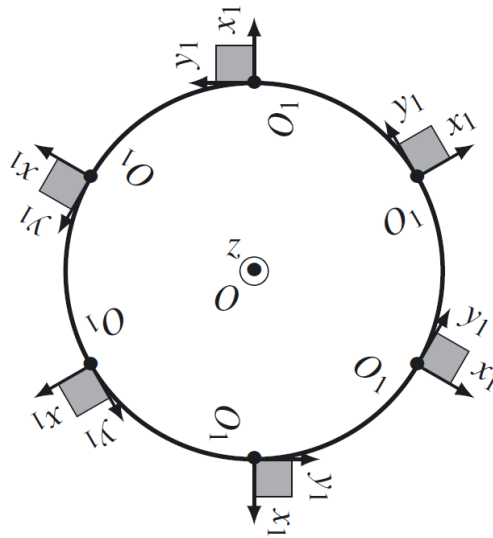


FIGURE 1.14 – Rotation autour d'un axe fixe.

---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Définition d'un solide.
- Translation.
- Rotation autour d'un axe fixe.

### Savoir-faire

- **Différencier** un solide d'un système déformable.
- **Reconnaître et décrire** une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- **Décrire** la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

## Leçon IV. Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Afin d'étudier la rotation d'un solide autour d'un axe fixe nous allons introduire la dernière grandeur cinétique permettant de faire l'analogie entre les translation et les rotations : **le moment d'inertie**  $J$ . Cette grandeur nous permettra de trouver des formes de l'énergie cinétique et de la puissance d'une force exercée sur un solide en rotation autour d'un axe fixe similaires analogue à celles introduites dans le cas d'un point matériel.

Nous introduirons également la notion de **couple de forces**  $\Gamma$ , qui nous poussera à revenir sur la définition de l'équilibre d'un système.

### IV.1. Moment cinétique d'un solide en rotation

Afin de faire émerger le moment d'inertie, faisons comme d'habitude, prenons le système simple qu'est le **point matériel**.

#### IV.1.a Moment d'inertie

Considérons un point  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  repéré dans une base cylindrique. Son moment cinétique par rapport à l'origine  $O$  du repère est

$$\vec{L}_O(M) = m \times \vec{OM} \times \vec{v}.$$

Dans la base cylindrique les vecteurs position  $\vec{OM}$  et vitesse  $\vec{v}$  sont tels que

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

il vient donc que

$$\vec{L}_O(M) = m \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\rho \dot{\theta} z \\ z \dot{\rho} - \dot{z} \rho \\ \rho^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) du repère est lui tel que

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{u}_z = m \rho^2 \dot{\theta}.$$

À partir de l'expression du moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) du point  $M$  nous pouvons définir **le moment d'inertie du point**.

#### ♥ Définition

En coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ) on définit **le moment d'inertie par rapport à l'axe ( $Oz$ ) d'un point**  $M$  de coordonnées  $(\rho, \theta, z)$  tel que

$$J_{(Oz)}(M) = m \rho^2.$$

Le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est donc égal au produit du moment d'inertie par la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de  $M$  soit

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)}(M) \dot{\theta}.$$

**Plus un objet a une masse  $m$  importante et plus sa distance  $\rho$  par rapport à l'axe de rotation est importante, et plus son moment d'inertie  $J$  est important.**

### 👉 Nota bene

Il y a analogie entre l'expression de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un point  $M$  et celle de son moment cinétique par rapport à un axe  $(Oz)$  lorsqu'on utilise le moment cinétique

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \text{et} \quad L_{(Oz)} = J_{(Oz)}(M) \dot{\theta}.$$

Comme la masse inerte  $m$  qui exprime la capacité d'un corps à être mis en mouvement (avoir une vitesse  $\vec{v}$ ), le moment d'inertie  $J_{(Oz)}(M)$  exprime la capacité d'un corps à être mis en rotation autour d'un axe  $(Oz)$  (avoir une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ ).

#### IV.1.b Solide en rotation autour d'un axe

À partir de la notion de moment d'inertie d'un point matériel, on peut définir le moment d'inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en étudiant son moment cinétique par rapport à cet axe.

Pour cela on choisit de faire coïncider l'axe de rotation du solide avec l'axe  $(Oz)$  d'un repère cylindrique. Le moment cinétique d'un point quelconque  $M_i$  de ce solide par rapport à l'axe de rotation du solide est

$$L_{(Oz)}(M_i) = J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}(M_i).$$

Comme le moment cinétique  $L_{(Oz)}$  par rapport à l'axe de rotation de **tout le solide** est la somme des moments cinétique de tous les points du solide, il vient que

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) \dot{\theta}(M_i).$$

Or on a vu que tous les points  $M_i$  d'un solide en rotation autour d'un axe fixe ont la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , ainsi  $\dot{\theta} = \dot{\theta}(M_i)$  pour tout point  $M_i$ , donc

$$L_{(Oz)} = \dot{\theta} \sum_i J_{(Oz)}(M_i).$$

### ♥ Définition

**Le moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  d'un solide** par rapport à l'axe de  $(Oz)$  est défini comme la somme des moment d'inertie des moments d'inerti par rapport à l'axe  $(Oz)$  de chacun des points le constituant, soit

$$J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i).$$

Grâce au moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  du solide et sa vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , on peut définir simplement son moment cinétique par rapport à son axe de rotation  $L_{(Oz)}$ , soit

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta}.$$

#### IV.1.c Définition exacte du moment d'inertie

Le moment d'inertie  $J$  d'un solide dépend de sa géométrie. Il s'obtient à partir de la formule suivante

$$J = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_m (x^2 + y^2) d\tau$$

avec  $\mathcal{V}$  le volume du solide,  $\rho_m$  la masse volumique du solide,  $x$  et  $y$  les coordonnées des points du solide dans un repère cartésien, et  $d\tau$  le volume d'intégration élémentaire.

- **Le cylindre plein**

Prenons l'exemple d'un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  et de masse  $m$ . On peut calculer sa masse volumique  $\rho_m$

$$\rho_m = \frac{m}{\pi R^2 h}.$$

Si on représente le cylindre en coordonnées cylindrique comme illustré Figure 1.15 on constate que la coordonnée radiale  $\rho$  dans le repère cylindrique est liée aux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  de telle manière que

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

On constate également que le volume d'intégration  $d\tau$  est tel que

$$d\tau = d\rho \times \rho d\theta \times dz.$$

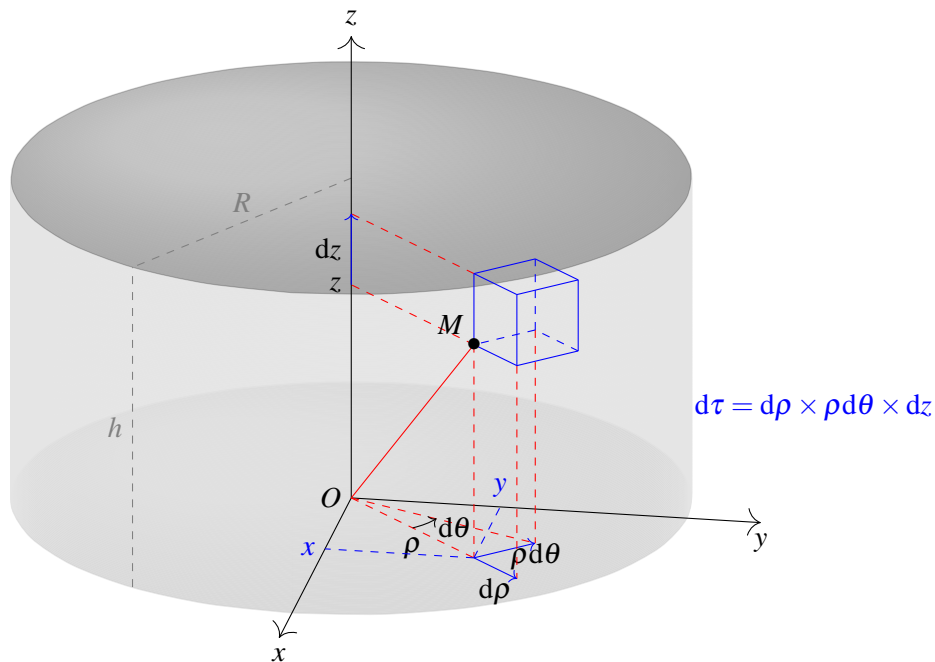


FIGURE 1.15 – Cylindre plein de masse volumique  $\rho_m$ .

On peut donc récrire la formule du moment d'inertie  $J$  telle que

$$J = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_m \rho^2 d\rho \times \rho d\theta \times dz.$$

La masse volumique  $\rho_m$  étant constante, il vient que

$$J = \rho_m \iiint_{\mathcal{V}} \rho^2 d\rho \times \rho d\theta \times dz.$$

En séparant les différentes variables d'intégration

$$J = \rho_m \int_0^R \rho^3 d\rho \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz$$

car un point  $M$  du cylindre a une coordonnée  $\rho$  qui vaut au minimum 0 et au maximum  $R$ ; une coordonnée angulaire  $\theta$  qui vaut au minimum 0 et au maximum  $2\pi$ ; et une coordonnée  $z$  qui vaut au minimum 0 et au maximum  $h$ .

En calculant les intégrales il vient que

$$J = \rho_m \times \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h$$

$$J = \rho_m \frac{R^4}{4} 2\pi h.$$

En utilisant l'expression de masse volumique  $\rho_m$

$$J = \frac{m}{\pi R^2 h} \times \frac{R^4}{4} 2\pi h.$$

**Le moment d'inertie d'un cylindre plein** par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est donc

$$J = \frac{1}{2} m R^2.$$

- **Le cylindre creux**

Dans le cas du cylindre creux, la masse est située sur la surface (on considère que le cylindre est ouvert en haut et en bas). Il faut donc utiliser une **masse surfacique**  $\sigma_m$  telle que

$$\sigma_m = \frac{m}{2\pi R h}$$

avec  $m$  la masse du solide creux, et  $2\pi R$  le périmètre des surfaces ouvertes.

On doit donc modifier la formule du moment d'inertie afin d'intégrer sur une surface, soit

$$J = \iint_{\mathcal{S}} \sigma_m (x^2 + y^2) dS$$

avec  $\mathcal{S}$  la surface du solide et  $dS$  la surface d'intégration élémentaire.

D'après la figure Figure 1.16, l'élément de surface élémentaire est  $dS = \rho d\theta \times dz$ . Il vient donc que le moment d'inertie est

$$J = \sigma_m \iint_{\mathcal{S}} \rho^2 \times \rho d\theta \times dz$$

avec  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , et  $\sigma_m$  constant sur toute la surface  $\mathcal{S}$ .

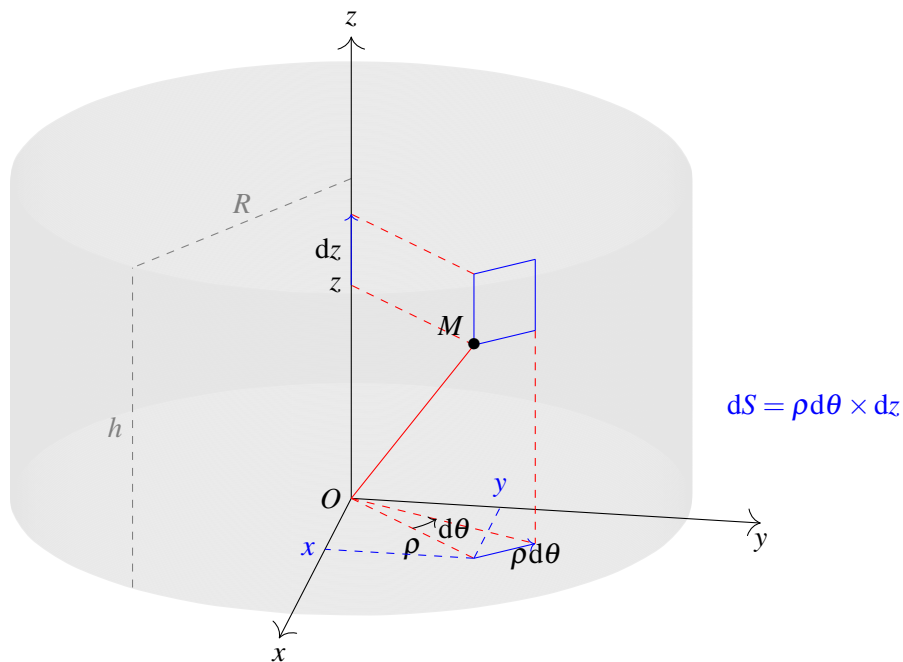


FIGURE 1.16 – Cylindre plein de masse volumique  $\sigma_m$ .

Un point  $M$  de la surface du cylindre a une coordonnée  $\rho$  qui est égale à  $R$  (le point est sur la surface); une coordonnée angulaire  $\theta$  qui vaut au minimum 0 et au maximum  $2\pi$ ; et une coordonnée  $z$  qui vaut au minimum 0 et au maximum  $h$ . En séparant les variables, il vient donc que

$$J = \sigma_m \rho^3 \int_0^\pi d\theta \times \int_0^h dz$$

soit

$$J = \sigma_m R^3 [\theta]_0^{2\pi} \times [z]_0^h$$

soit

$$J = \sigma_m R^3 2\pi h = \frac{m}{2\pi R h} R^3 2\pi h.$$

Le moment d'inertie d'un cylindre creux par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est donc

$$J = mR^2.$$

- **La barre de longueur  $L$**

Dans le cas d'une barre de longueur  $L$ , la masse est distribuée sur toute la longueur de la barre. Il faut donc utiliser une **masse linéique**  $\lambda_m$  telle que

$$\lambda_m = \frac{m}{L}.$$

On doit donc modifier la formule du moment d'inertie afin d'intégrer sur une longueur, soit

$$J = \int_L \lambda_m (x^2 + y^2) dl$$

avec  $dl$  l'élément de longueur élémentaire.



D'après la figure Figure 1.17, si on oriente la barre uniquement sur l'axe ( $Ox$ ) la coordonnée  $y$  d'un point  $M$  de la barre est égale à 0, et la coordonnée  $x$  est comprise entre  $-L/2$  et  $L/2$ , il vient donc que  $dl = dx$  soit

$$J = \lambda_m \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

avec  $\lambda_m$  constant sur toute la barre.

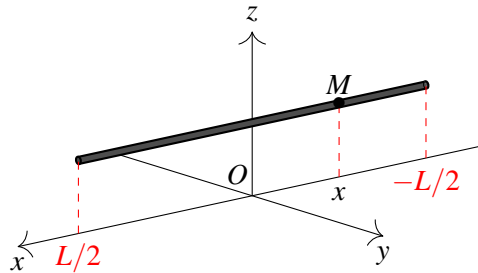


FIGURE 1.17 – Cylindre plein de masse volumique  $\sigma_m$ .

Ainsi

$$J = \lambda_m \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

soit

$$J = \frac{m}{L} \left( \frac{L^3}{24} - \left( -\frac{L^3}{24} \right) \right).$$

Le moment d'inertie d'une barre par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est donc

$$J = \frac{1}{12} mL^2.$$

#### Nota bene

On voit que pour une même masse  $m$ , le moment d'inertie d'un cylindre creux est plus important que celui d'un cylindre plein car la masse  $m$  est située plus loin de l'axe de rotation du solide.

## IV.2. Théorème du moment cinétique pour un solide autour d'un axe fixe

Nous avons déjà introduit le théorème du moment cinétique pour un point matériel. Nous allons utiliser ce théorème dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, et mettre à profit la notion de moment d'inertie.

## IV.2.a Définition

## ♥ Définition

**Le théorème du moment cinétique** implique que dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique d'un solide par rapport à son axe de rotation fixe ( $Oz$ ) est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à ce même axe

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

avec  $\vec{f}_i$  les forces exercées sur le solide.

Or pour un solide en rotation, on peut exprimer le moment cinétique en fonction de son moment d'inertie et de sa vitesse angulaire

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \frac{d}{dt} (J_{(Oz)} \dot{\theta}).$$

Comme le moment d'inertie d'un solide  $J_{(Oz)}$  est constant, il vient que

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta}$$

avec  $\ddot{\theta}$  l'accélération angulaire.

On peut donc récrire **le théorème du moment cinétique** dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe ( $Oz$ )

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i).$$

**On constate une analogie directe entre le PFD et le théorème du moment cinétique**

$$\text{PFD : } m \vec{a} = \sum_i \vec{f}_i \quad ; \quad \text{Th. moment cinétique : } J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i).$$

La masse inerte  $m$  est la grandeur qui exprime la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement : à rester inerte, à avoir une certaine accélération  $\vec{a}$ .

Le moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  est la grandeur qui exprime la capacité d'un corps à résister à la mise en rotation : à rester inerte, à avoir une certaine accélération angulaire  $\ddot{\theta}$ .

## IV.2.b Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle, soit

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad L_{(Oz)} = \text{cst} = J_{(Oz)} \dot{\theta} = \text{cst}.$$

Comme le moment d'inertie d'un solide est constant il vient que **la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est aussi constant.**

### Nota bene

Il y a équilibre d'un solide lorsque **la vitesse de son centre de masse est constamment nulle**  $\vec{v} = \vec{0}$  et lorsque **sa vitesse angulaire est constamment nulle**  $\dot{\theta} = 0$ .

Ainsi, à l'équilibre, le moment cinétique d'un solide est nul ainsi que la somme du moment des forces qui lui sont appliquées

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)} \dot{\theta} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) = 0.$$

### IV.3. Actions mécaniques s'exerçant sur un solide en rotation

Nous avons vu que l'équilibre d'un solide implique que la vitesse de son centre de masse est nulle et que sa vitesse angulaire soit aussi nulle. Mais qu'advient-il lorsque seule la vitesse de son centre de masse est nulle, ce qui implique que la somme des forces est nulle ?

#### IV.3.a Couple

Considérons un solide d'axe de rotation  $(Oz)$  sur lequel on exerce à deux endroits  $A_1$  et  $A_2$  les forces  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  respectivement comme cela est illustré Figure 1.18. Les forces sont telles que  $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ , elles sont égales en norme mais opposées en sens. On introduit la norme  $f$  telle que  $f = |\vec{f}_1| = |\vec{f}_2|$ .

On constate que la somme des forces est bien nulle,  $\sum_i \vec{f}_i = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$ .

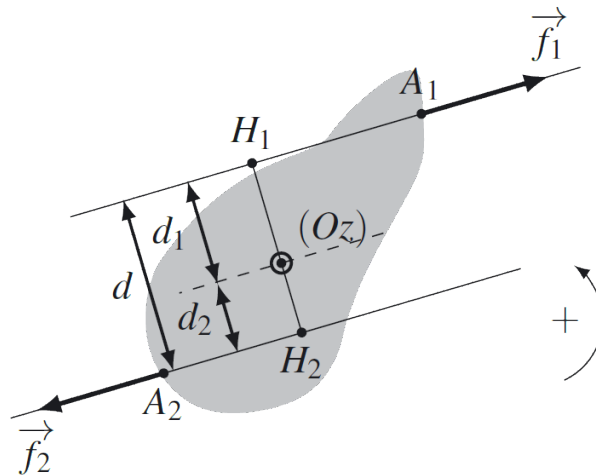


FIGURE 1.18 – Couple de forces.

Si on calcule le moment de chacune des forces par rapport au point  $O$  il vient, en utilisant la notion de bras de levier que

$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{f}_1) = -d_1 f \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{f}_2) = -d_2 f \vec{u}_z.$$

Le moment de ces forces par rapport à l'axe  $(Oz)$  est donc

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_1) = \vec{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{f}_1) \cdot \vec{u}_z = -d_1 f \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_2) = \vec{\mathcal{M}}_{(O)}(\vec{f}_2) \cdot \vec{u}_z = -d_2 f.$$

Le moment par rapport à l'axe de rotation de ces deux forces, aussi appelé **moment du couple de forces** est

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_1) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_2) = -f(d_1 + d_2) = -fd$$

avec  $d$  la distance entre les droites d'action des deux forces.

Comme le moment des forces par rapport à l'axe des rotation est non nulle, il vient que l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  est non nulle, donc que le solide possède une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  non nulle : le système n'est donc pas en équilibre, même si la vitesse de son centre de masse n'est pas nulle.

Par abus de langage, on appelle souvent le moment du couple de forces  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  par rapport à l'axe de rotation du solide **le couple de ce solide qu'on note  $\Gamma$** , soit

$$\Gamma = -fd.$$

### Nota bene

- Le couple  $\Gamma$  ne dépend pas de la position de l'axe de rotation, il dépend de la distance  $d$  entre les deux droites d'action des forces.
- Si ces forces font tourner le solide dans le sens direct par rapport à l'axe  $(Oz)$  le couple est positif  $\Gamma > 0$ .  
Si ces forces font tourner le solide dans le sens indirect par rapport à l'axe  $(Oz)$ , comme c'est le cas ici, le couple est négatif  $\Gamma < 0$ .
- On peut généraliser la notion de couple à un nombre  $N$  de forces si la somme des forces est nulles  $\sum_i^N \vec{f}_i$ .

#### IV.3.b Couple moteur et couple de freinage

On a vu que pour un solide sur rotation autour d'un axe  $(Oz)$  il vient que

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta}.$$

Si ce solide est soumis à un couple de forces  $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$  il vient que

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)} \vec{f}_i = \Gamma.$$

Considérons la situation pour laquelle la vitesse de rotation du solide est positive  $\dot{\theta} > 0$ , donc il tourne dans le sens direct par rapport à son axe de rotation  $(Oz)$ . On peut alors distinguer deux cas.

- Si  $\ddot{\theta} > 0$ , alors la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  augmente, on voit que  $\Gamma > 0$  : **le couple est un couple moteur.**
- Si  $\ddot{\theta} < 0$ , alors la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  diminue, on voit que  $\Gamma < 0$  : **le couple est un couple de freinage.**

#### IV.3.c Liaison pivot

Les systèmes rotatifs sont composés d'un solide indéformable appelé **rotor** qui est mis en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile appelé **stator**. Le stator impose des actions mécaniques au rotor pour provoquer la rotation du rotor.

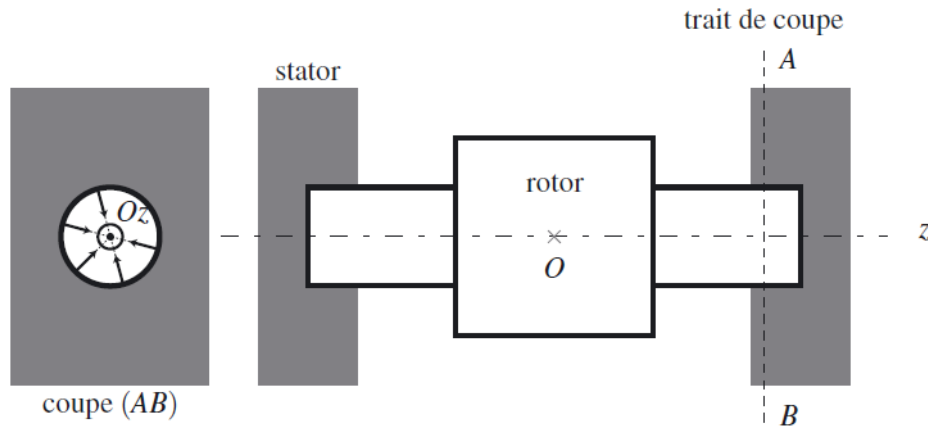


FIGURE 1.19 – Couple de forces.

### ♥ Définition

Une liaison pivot d'axe ( $Oz$ ) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe ( $Oz$ ) par rapport au stator.

L'action de liaison entre le stator et le rotor résulte de forces exercées par le stator sur le rotor.

On voit que s'il n'y a pas de force de frottement, les forces sont orientées vers l'axe de rotation, donc la liaison pivot d'axe ( $Oz$ ) résulte en un moment de forces nulles (le bras de levier de ces forces nulles comme on peut le voir sur la Figure 1.19)

$$\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) = 0$$

on dit alors que **la liaison pivot est idéale**.

## IV.4. Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Comme nous l'avons fait dans le cas d'un point matériel, nous allons nous intéresser à l'énergétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

### IV.4.a Énergie cinétique

On considère un solide en rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .

On étudie l'ensemble des points  $M_i$  du solide. Chacun des points a une vitesse  $\vec{v}_i$  telle que

$$\vec{v}_i = \rho_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v_i \vec{u}_\theta$$

avec  $v_i = \rho_i \dot{\theta}$ . Il n'y a pas de composante radiale de la vitesse  $\dot{\rho}_i \vec{u}_\rho$ , car les points  $M_i$  tournent selon des trajectoires circulaires autour de l'axe ( $Oz$ ) (leur coordonnée radiale  $\rho_i$  est constante).

L'énergie cinétique des points est donc

$$\mathcal{E}_{c,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \dot{\theta}^2.$$

Ainsi l'énergie cinétique totale du solide est

$$\mathcal{E}_c = \sum_i \mathcal{E}_{c,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \dot{\theta}^2.$$

Comme la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est la même pour tous les points, il vient que

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_i m_i \rho_i^2.$$

On reconnaît l'expression du moment d'inertie du solide autour de l'axe  $(Oz)$   $J_{(Oz)} = \sum_i m_i \rho_i^2$ . Il vient donc

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2.$$

**On constate une analogie directe entre les expressions des énergies cinétiques d'un point et d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**

$$\text{Point : } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad \text{Solide en rotation autour d'un axe fixe : } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2.$$

La masse inerte  $m$  est la grandeur qui exprime la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement : à rester inerte, à avoir une certaine valeur de vitesse  $v$ .

Le moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  est la grandeur qui exprime la capacité d'un corps à résister à la mise en rotation : à rester inerte, à avoir une certaine vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .

#### IV.4.b Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

On considère une force  $\vec{f}_i$  qui s'applique sur un point  $M_i$  d'un solide en rotation. La puissance de la force est égale au produit scalaire de la force  $\vec{f}_i$  et de la vitesse du point du solide  $\vec{v}_i = \rho_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

Ainsi

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = (f_{i,\rho} \vec{u}_\rho + f_{i,\theta} \vec{u}_\theta) \cdot \rho_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = f_{i,\theta} \rho_i \dot{\theta}$$

avec  $f_{i,\rho}$  et  $f_{i,\theta}$  les composantes de la force  $\vec{f}_i$  dans la base cylindro-polaire.

Si on calcule le moment de la force  $\vec{f}_i$  par rapport à l'axe  $(Oz)$  il vient que

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) = (\vec{OM}_i \wedge \vec{f}_i) \cdot \vec{u}_z = \left( \begin{pmatrix} \rho_i \\ 0 \\ z_i \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_{i,\rho} \\ f_{i,\theta} \\ f_{i,z} \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{u}_z = \begin{pmatrix} -z_i f_{i,\theta} \\ z_i f_{i,\rho} - \rho_i f_{i,z} \\ \rho_i f_{i,\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_i f_{i,\theta}.$$

On peut donc exprimer la puissance d'une force exercée sur un point  $M_i$  d'un solide en fonction du moment de cette force

$$\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}_i.$$

**On constate une analogie directe entre les expressions des puissances des forces exercées sur un point et sur un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**

$$\text{Point : } \mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i \quad ; \quad \text{Solide en rotation autour d'un axe fixe : } \mathcal{P}(\vec{f}_i) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i) \dot{\theta}_i.$$

## IV.4.c Théorème de l'énergie cinétique d'un solide indéformable

## ♥ Définition

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures  $\vec{f}_i$  qu'on lui applique

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i).$$

Étudions la dérivée temporelle de l'énergie cinétique du solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2)$$

car le moment d'inertie d'un solide indéformable est constant. Ainsi

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = J_{(Oz)} \ddot{\theta} \dot{\theta}.$$

Or nous avons montré grâce au théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe que

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

il vient donc que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \dot{\theta} \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

soit

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i).$$

**Nous avons démontré le théorème de l'énergie cinétique, précisément de la puissance cinétique, dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.**

Grâce à la relation

$$\sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i) = \dot{\theta} \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$$

on constate que si la somme des moments des forces  $\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$  est du même signe que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , la puissance des forces  $\sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$  est positive : **le couple est moteur.**

Si la somme des moments des forces  $\sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$  est de signe opposé à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , la puissance des forces  $\sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$  est négative : **le couple est résistant.**

---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.
- Couple.
- Liaison pivot.
- Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
- Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

### Savoir-faire

- **Exploiter**, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- **Relier** qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- **Définir** un couple.
- **Définir** une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- **Exploiter** le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
- **Utiliser** l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- **Établir**, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.



## Trousse de premiers secours en cas d'exercice de mécanique

### Premiers gestes

- **Déterminer** le système.
- **Choisir** un référentiel d'étude galiléen adapté.
- **Recenser** les forces exercées sur le système ainsi que leur point d'application.

### Quel(s) outil(s) utiliser ?

