TD II. Transitions de phase d'un corps pur diphasé

Exercice II.1. Questions qualitatives sur les changements d'état ★

1. **Déterminer** pourquoi les patins à glace glissent-ils sur la glace.
2. On remplit à moitié une bouteille d'eau minérale en plastique avec de l'eau chaude, puis on la ferme bien. **Déterminer** ce qu'il se passe quand la bouteille refroidit et **en donner** les causes.

Exercice II.2. Étude de quelques transformations d'un corps d'après CCP TSI ★

On s'intéresse à l'eau dont le diagramme des phases est donné ci-dessous.

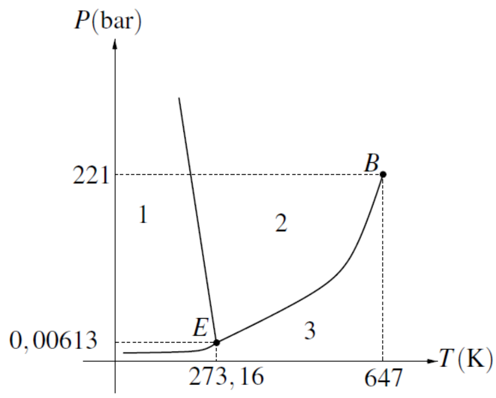

Figure 1 – Diagrammes (P,T) des phases de l'eau

1. **Reproduire** ce diagramme et le compléter en donnant les domaines d'existence des différentes phases et en définissant les points caractéristiques.
2. **Définir** la pression de vapeur saturante et préciser de quel(s) paramètre(s) elle dépend.
3. **Nommer** le passage de la vapeur au liquide.
4. **Représenter** le diagramme donnant la pression en fonction du volume pour la transformation correspondante. On définira les domaines et on tracera les courbes de rosée et d'ébullition.
5. Soit une enceinte cylindrique diathermane de volume initial V, ce volume pouvant être modifié en déplaçant sans frottement un piston. L'ensemble est maintenu sous la pression atmosphérique à la température $T = 373\,\mathrm{K}$. À cette température la pression de vapeur saturante vaut $1{,}0\,\mathrm{bar}$. La vapeur d'eau sèche et saturante sera considérée comme un gaz parfait. On néglige le volume occupé par la phase liquide devant le volume occupé par la vapeur, ainsi le volume de la phase gazeuse est égal au volume total de l'enceinte. Le cylindre étant initialement vide, on introduit, piston bloqué, une masse m d'eau. Déterminer la masse maximale m_{max} d'eau qu'on peut introduire pour que l'eau soit entièrement sous forme vapeur. On donnera sa valeur en fonction de R, T, V, P_{sat} la pression de vapeur saturante et M_{eau} la masse molaire de l'eau.
6. On considère que la masse d'eau introduite est inférieure à m_{max}. **Déterminer** l'état dans lequel se trouve l'eau.
7. Pour obtenir l'équilibre entre les phases liquide et vapeur de l'eau, **déterminer** s'il faut augmenter ou diminuer le volume. **Déterminer** le volume limite V_{lim} à partir duquel on a cet équilibre.
8. La masse m d'eau introduite est telle qu'on a l'équilibre entre les phases liquide et vapeur. **Déterminer** la fraction massique d'eau sous forme vapeur.

Exercice II.3. Évaporation de l'eau ★

Dans une pièce hermétiquement fermée, de volume $V = 40\,\mathrm{m}^3$, on place un verre contenant un volume $V_0 = 200\,\mathrm{mL}$ d'eau liquide.

L'air de la pièce est à la pression $P_0 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ et à la température $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Son taux d'humidité, encore appelé degré d'hygrométrie est $H = 60\,\%$. H est le rapport de la pression partielle de la vapeur d'eau divisée par la pression de vapeur saturante de l'eau, valant dans ces conditions $P_{sat,eau} = 2{,}3\,\mathrm{kPa}$. On assimile l'eau à un gaz parfait de masse molaire $M = 18\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

1. **Calculer** la quantité d'eau initialement contenue dans l'atmosphère de la pièce.
2. **Montrer** que toute l'eau contenue dans le verre s'évapore. **Déterminer** le degré d'hygrométrie final de l'air de la pièce.
3. **Déterminer** le volume d'eau liquide nécessaire pour saturer en eau la pièce considérée dans ces conditions initiales.

Exercice II.4. Étude d'un compresseur ★ ★

Un compresseur est constitué de la façon suivante : un piston se déplace dans un cylindre C qui communique par des soupapes s et s' respectivement avec l'atmosphère (pression P_a) et avec le réservoir R contenant l'air comprimé. Le réservoir R contient initialement de l'air considéré comme gaz parfait à la pression $P_0 \geq P_a$. Le volume du réservoir R, canalisations comprises, est V. Le volume offert au gaz dans C varie entre un volume maximum V_M et un volume minimum V_m, volume nuisible résultant de la nécessité d'allouer un certain espace à la soupape s.

La soupape s s'ouvre lorsque la pression atmosphérique P_a devient supérieure à la pression dans le cylindre C et se ferme pendant la descente du piston.

La soupape s' s'ouvre lorsque la pression dans le réservoir devient supérieure à celle du gaz dans le cylindre C et se ferme pendant la montée du piston.

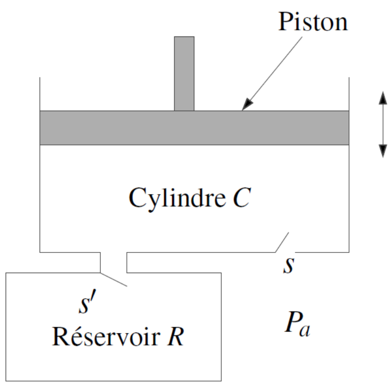

Figure 2 – Schéma d'un compresseur

Au départ, le piston est dans sa position la plus haute ($V = V_M$), s' est fermée, s est ouverte et le volume V_m est empli d'air à la pression P_a.

1. En supposant que le piston se déplace assez lentement pour que l'air reste à température constante, **calculer** le volume V_1' pour lequel s' s'ouvre, en fonction de P_0, P_a et V_M.
   Initialement le piston est en haut. Lorsqu'il commence sa descente, la soupape s se ferme. Le système considéré est donc le gaz dans le cylindre de pression P, jusqu'à l'ouverture de s' pour V_1' et $P = P_0$.
   Etat initial
   $$P = P_a \,;\, V = V_M \,;\, T \,;\, n_C.$$
   Etat final
   $$P = P_0 \,;\, V = V_1' \,;\, T \,;\, n_C.$$
   On applique l'équation du gaz parfait pour trouver V_1'
   $$V_1' = \frac{P_a V_M}{P_0}.$$

2. **Calculer** la pression P_1 dans le réservoir R après le premier aller-retour.
La soupape s' étant ouverte, le système est constitué du gaz dans le cylindre et du gaz dans le réservoir. L'état final est obtenu lorsque le piston est au fond du cylindre. Etat initial

$$P_0\,;\,V_1'+V\,;\,T\,;\,n_C+n_R.$$

Etat final

$$P_1\,;\,V_m+V\,;\,T\,;\,n_C+n_R.$$

On applique l'équation du gaz parfait

$$(n_C+n_R)\,RT=P_1\,(V_m+V)=P_0\,(V_1'+V)\,.$$

En utilisant la relation trouvée plus tôt

$$V_1'=\frac{P_aV_M}{P_0}$$

il vient que

$$P_1\,(V_m+V)=P_0\left(\frac{P_aV_M}{P_0}+V\right)=P_aV_M+P_0V$$

soit

$$P_1=P_a\frac{V_M}{V_m+V}+P_0\frac{V}{V_m+V}.$$

3. En écrivant une condition sur V_1', **calculer** la valeur P_{max} au-dessus de laquelle la pression ne peut pas monter dans le réservoir.
Pour que la soupape s' s'ouvre, il faut que le volume V_1' soit atteint avant que le piston ne soit complètement descendu, donc que :

$$V_1'\geq V_m.$$

On en déduit

$$P_0\leq P_{\mathsf{max}}=P_a\frac{V_M}{V_m}.$$

4. **Calculer** la pression P_n dans le réservoir R après n allers et retours du piston.
Pour les allers et retours suivants le raisonnement est semblable. Pour obtenir la pression P_2, il suffit de remplacer P_0 par P_1, dans l'expression obtenue question 2

$$P_2=P_a\frac{V_M}{V_m+V}+P_1\frac{V}{V_m+V}.$$

On remplace alors P_1 par la même expression obtenue question 2

$$P_2=P_a\frac{V_M}{V_m+V}+P_a\frac{V_M}{V_m+V}\frac{V}{V_m+V}+P_0\left(\frac{V}{V_m+V}\right)^2$$

$$P_2=P_a\frac{V_M}{V_m+V}\left(1+\frac{V}{V_m+V}\right)+P_0\left(\frac{V}{V_m+V}\right)^2.$$

Pour un troisième aller retour on obtient P_3 en remplaçant P_1 par P_2

$$P_3=P_a\frac{V_M}{V_m+V}+P_2\frac{V}{V_m+V}$$

$$P_3=P_a\frac{V_M}{V_m+V}\left(1+\frac{V}{V_m+V}+\left(\frac{V}{V_m+V}\right)^2\right)+P_0\left(\frac{V}{V_m+V}\right)^3.$$

On identifie alors la formule de récurrence suivante

$$P_n = P_a \frac{V_M}{V_m + V} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{V}{V_m + V} \right)^k + P_0 \left(\frac{V}{V_m + V} \right)^n.$$

On utilise la formule de la somme d'une suite arithmétique $\sum_{k=0}^{n} q^k \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, ainsi

$$P_n = P_a \frac{V_M}{V_m + V} \frac{1 - \left(\frac{V}{V_m+V} \right)^n}{1 - \frac{V}{V_m+V}} + P_0 \left(\frac{V}{V_m + V} \right)^n.$$

5. **Donner** la valeur limite de P_n quand $n \gg 1$. **Comparer** cette limite avec P_{max}.
   Quand $n \to +\infty$ il vient que

$$P_n = P_a \frac{V_M}{V_m + V} \frac{1}{1 - \frac{V}{V_m+V}} = P_a \frac{V_M}{V_m + V - V} = P_a \frac{V_M}{V_m}.$$

   Il s'agit de la pression maximale P_{max}.
6. **Calculer** P_1 et P_{max} avec $V = 5\,\mathrm{L}$, $V_M = 0{,}25\,\mathrm{L}$, $V_m = 10\,\mathrm{cm}^3$, $P_0 = P_a = 1\,\mathrm{bar}$.
   A.N.

$$P_1 = 1\,\mathrm{bar} \frac{0{,}25 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 + 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} + 1\,\mathrm{bar} \frac{5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 + 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 1{,}05\,\mathrm{bar}.$$

$$P_{\mathsf{max}} = 1\,\mathrm{bar} \frac{0{,}25 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = 25\,\mathrm{bar}.$$