

DS 6 - Mécanique du solide, second principe de la thermodynamique et transition de phases de corps purs

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **3 parties indépendantes**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Différentielle exacte d'une fonction f dépendant de x et y : $df = \left(\frac{df}{dx}\right)_y dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_x dy$.
-

1 Thermodynamique

Adapté du concours communs polytechnique - MP (2006)

1.1 Fonctions d'état d'un système fermé

1. On rappelle les expressions des différentielles dU et dH des fonctions d'état énergie interne $U(T, V)$ et enthalpie $H(T, P)$ d'un système fermé sont

$$dU = C_V dT + (L - P) dV \quad ; \quad dH = C_P dT + (K + V) dP$$

avec K et L des coefficients calorimétriques inconnues.

Définir exactement les capacités thermiques à volume constant C_V et à pression constante C_P à partir des fonctions $U(T, V)$ et $H(T, P)$.

2. Établir les valeurs des coefficients calorimétriques L et K pour un système dont l'énergie interne et l'enthalpie ne sont fonctions que de la température. On donnera respectivement L et K en fonction de P et V .
3. Donner l'identité thermodynamique impliquant dU .
4. On définit de nouvelles fonctions d'état énergie libre $F(T, V)$ et enthalpie libre $G(T, P)$ d'un système par les relations $F = U - TS$ et $G = H - TS$.
Exprimer les différentielles dF et dG d'un système fermé en fonction de T , S , P et V en utilisant l'identité thermodynamique impliquant dU .

1.2 Détente de Joule et Gay Lussac d'un gaz réel

5. Dans un certain domaine de température et de pression, l'équation d'état d'une mole de gaz réel s'écrit :

$$\left(P + \frac{a^2}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

dans laquelle a , b et R sont des constantes.

Son énergie interne U est telle que

$$U = U_0 + C_0 T - \frac{a^2}{V}$$

avec U_0 et C_0 des constantes.

On fait subir à ce gaz une détente de Joule et Gay Lussac qui fait passer son volume de V_1 à $V_2 = 2V_1$. On rappelle les conditions expérimentales pour cette détente :

- enceinte calorifugée et rigide séparée en deux sous-enceintes de volume V_1 et $V_2 - V_1$ par une paroi calorifugée également
- au départ seule la sous-enceinte de volume V_1 contient du gaz, l'autre étant vide
- à $t = 0$, on enlève la paroi.

Montrer que cette détente est isoénergétique $\Delta U = 0$.

6. On note $T_1 = 300\text{K}$ la température initiale du gaz et ΔT la variation de température qu'il subit au cours de cette détente. Exprimer la différentielle d'énergie interne $U(T, V)$ et l'intégrer en utilisant les bornes adéquates.
7. Exprimer ΔT en fonction de V_1 et de constantes.
8. Calculer ΔT pour $a = 0,135\text{SI}$, $C_0 = 29,1\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $V_1 = 10\text{L}$.
9. Quelle valeur de ΔT aurait-on obtenu dans le cas d'un gaz parfait. Justifier.
10. Montrer que la variation d'entropie du gaz réel ΔS est telle que

$$dS = \frac{C_0}{T} dT + \frac{R}{V-b} dV.$$

11. Calculer la variation d'entropie du gaz pour $b = 3,2 \times 10^{-5} \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.
12. Calculer l'entropie créée S_c . Conclure sur la nature de la transformation.

2 Diagramme de Clapeyron (P, v) du système liquide-vapeur de l'eau

Adapté du concours communs polytechnique - MP (2007)

On désigne par P la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

13. Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron (P, v) de l'eau. On prendra soin de préciser la position du point critique C, les domaines liquide (L), liquide + vapeur (L+V), et vapeur (V).
14. Représenter, sur le diagramme précédent l'allure de l'isotherme critique T_C et préciser sa caractéristique.
15. Représenter, sur le diagramme précédent l'allure d'une isotherme $T < T_C$.
16. On désigne par v_m , le volume massique d'un système liquide-vapeur. Montrer que le titre massique en vapeur x est donné par

$$x = \frac{v_m - v_L}{v_G - v_L}.$$

3 La marche du berger landais sur échasses

Concours commun des instituts nationaux polytechniques - MPI (2024)

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses. Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIII^e siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XX^e siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'*escasse* ("jambe" en patois landais) et le *paouse pé* ("repose pied"), fixé sur l'*escasse*, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse.

On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de "marche à pied augmentée".

Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en Figure 1. Les schémas en Figure 1 et Figure 2 précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

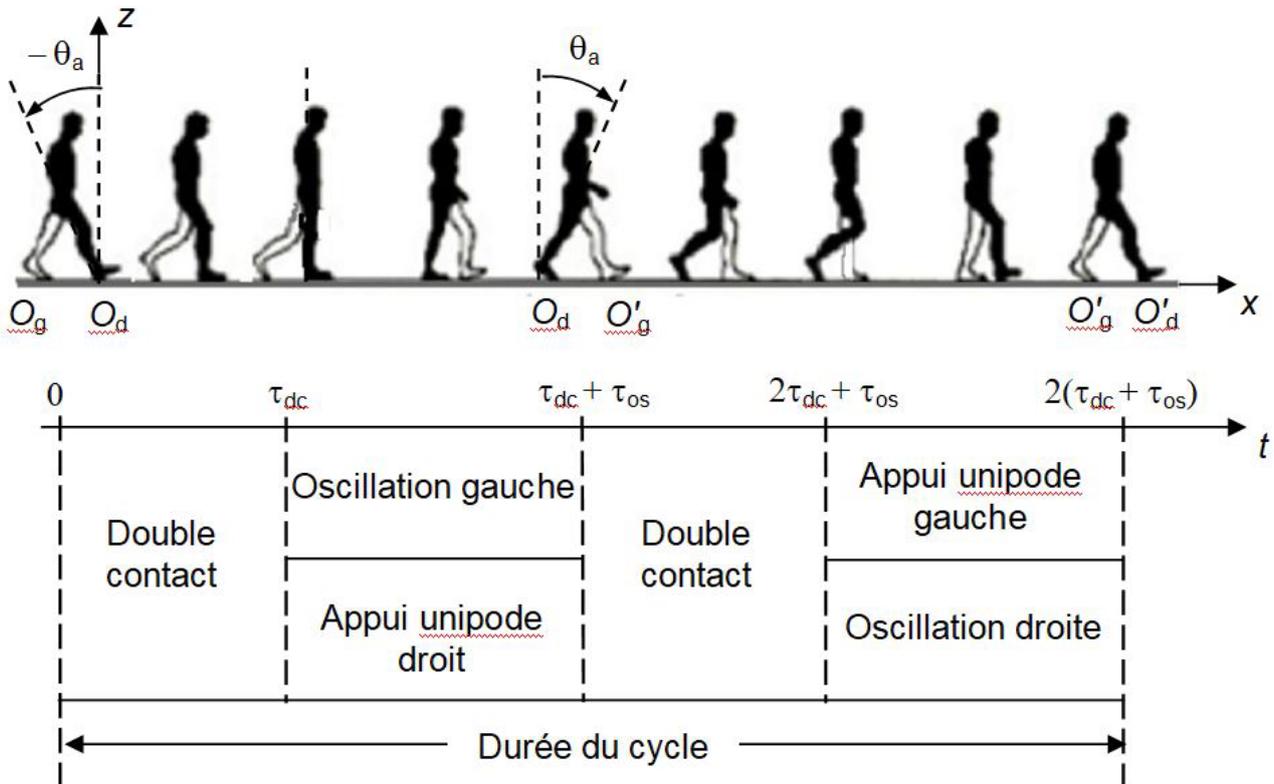


Figure 1: Phases du cycle de la marche.

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

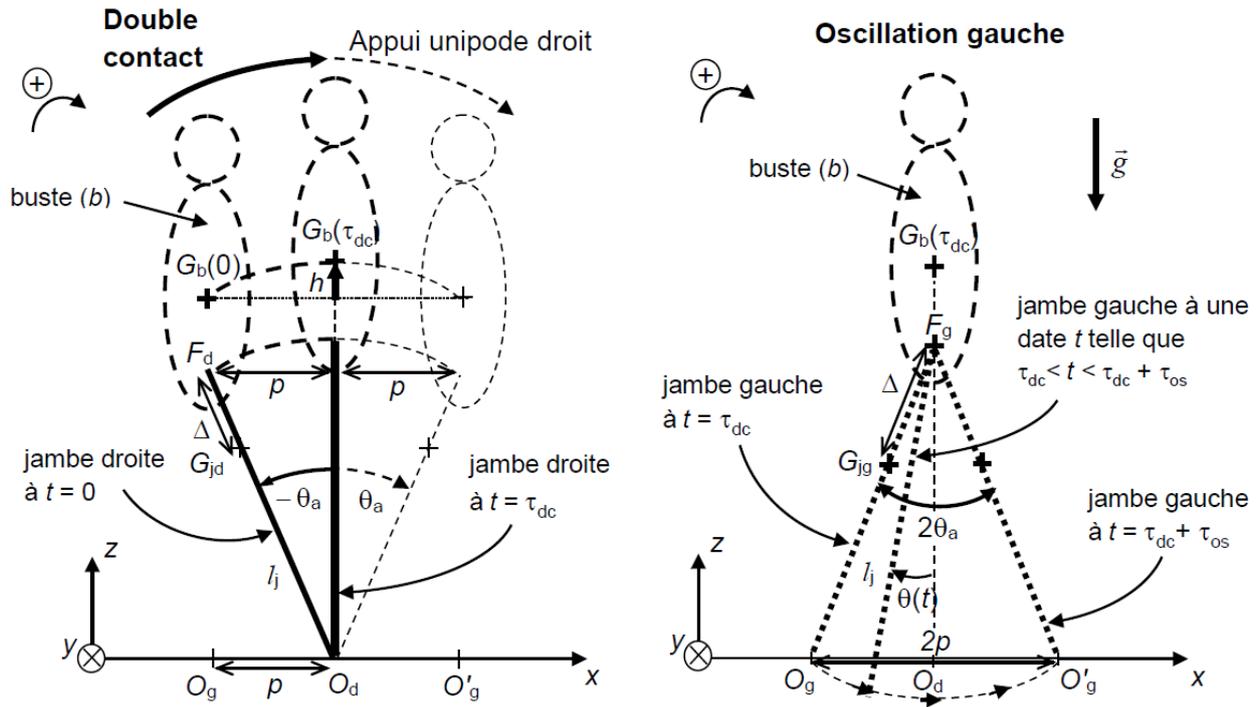


Figure 2: Phase de double contact (figure de gauche) et phase d'oscillation gauche (figure de droite).

▪ **Phase de double contact**

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (Figure 1 et Figure 2 gauche) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

▪ **Phase d'oscillation gauche**

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_g y$ (Figure 2 droite) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la Figure 2 gauche).

▪ **Appuis au sol et définition du pas**

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en O'_g , à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O'_g$ définit le pas de la marche. Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant : chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d), et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé comme un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$.
- $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$).
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

3.1 Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale ascendante (Figure 2 droite).

17. En appliquant le théorème du moment cinétique à (j_g) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ pendant cette phase d'oscillation.
18. Dans l'approximation des petits angles, exprimer en fonction de $m - j$, J_F , g et de Δ , la pulsation ω_{os} et la durée τ_{os} de cette phase d'oscillation.

3.2 Étude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase de double contact :

- Le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne $\vec{V}_{dc} = V_{dc} \vec{u}_x$ avec $V_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$ (la composante verticale est donc négligée).
 - Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de (j_d) et de (j_g) sont négligées.
 - Les variations d'énergie cinétique de (j_d) et de (j_g) sont supposées égales.
 - Le mouvement de rotation de (j_d) autour de $O_d y$ s'effectue à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$, avec $\Omega(t = 0) = 0$.
19. On note $h = z_{G_b(\tau_{dc})} - z_{G_b(0)}$ la variation d'altitude du point G_b entre les instants de dates $t = 0$ et $t = \tau_{dc}$ (Figure 2 gauche). Exprimer la variation $\Delta \mathcal{E}$ de l'énergie mécanique de (Σ) entre ces deux instants, en fonction de J_O , $\Omega(\tau_{dc})$, m_b , g et de h .

3.3 Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

20. En supposant quasi-constante la puissance \mathcal{P} fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue \mathcal{P} par

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\tau_{dc}}.$$

Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de \mathcal{P} .

21. Avec $h \simeq \frac{p^2}{l_j}$ (expression approchée de h valable pour les petits angles θ_a) et en supposant des conditions de marche telles que $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$ avec ω_{os} la pulsation trouvée à la question 18, montrer que

$$\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{l_j} \right) g V_{dc}.$$

22. Obtenir l'expression du pas p_{opt} qui minimise \mathcal{P} .
23. Application numérique : $l_j = 1 \text{ m}$, $m_j = 10 \text{ kg}$, $m_b = 60 \text{ kg}$, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a alors $\Delta = l_j/2$ et $J_O = J_F$.

3.4 Pas optimal avec des échasses

Soit maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur l^* , solidarisée à la jambe et formant avec elle une "jambe équivalente" de longueur $l^* + l_j$. On note E le point de contact entre le sol et l'échasse et J_E^* le moment d'inertie, par rapport à l'axe Ey , de la "jambe équivalente".

24. Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de p_{opt} obtenue en 22, indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications.
25. En déduire l'expression de p_{opt}^* , puis donner le rapport $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ en fonction de $\frac{J_E^*}{J_O}$ et de $\frac{l^*}{l_j}$.

On donne ci-dessous les expressions des moments d'inertie d'une jambe à répartition de masse uniforme, sans ou avec échasse, par rapport à l'axe de rotation au sol.

- Jambe seule en contact avec le sol en O :

$$J_O = \frac{m_j}{3} l_j^2.$$

- Jambe avec échasse en contact avec le sol en E :

$$J_E^* = \frac{m_j}{3} (l_j^2 + 3l^* l_j + 3l^{*2}).$$

26. Exprimer $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ en fonction du seul rapport $\frac{l^*}{l_j}$ dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.
27. Calculer $\frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$ pour un berger adulte de longueur de jambe $l_j = 1$ m, monté sur des échasses de longueur $l_j^* = 1$ m.
28. Justifier si la durée de la phase oscillante est changée avec les échasses.
29. Des études statistiques ont montré, qu'une fois le pas optimal adopté, la vitesse moyenne de déplacement horizontal du marcheur sur un cycle est proportionnelle au pas optimal et à la pulsation de la phase oscillante.
En déduire le rapport $\frac{V^*}{V}$ des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses. Commenter.

FIN DU SUJET