

DS 6 - Mécanique du solide, second principe de la thermodynamique et transition de phases de corps purs

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **3 parties indépendantes**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Différentielle exacte d'une fonction f dépendant de x et y : $df = \left(\frac{df}{dx}\right)_y dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_x dy$.

1 Thermodynamique

Adapté du concours communs polytechnique - MP (2006)

1.1 Fonctions d'état d'un système fermé

- On rappelle les expressions des différentielles dU et dH des fonctions d'état énergie interne $U(T, V)$ et enthalpie $H(T, P)$ d'un système fermé sont

$$dU = C_V dT + (L - P) dV \quad ; \quad dH = C_P dT + (K + V) dP$$

avec K et L des coefficients calorimétriques inconnues.

Définir exactement les capacités thermiques à volume constant C_V et à pression constante C_P à partir des fonctions $U(T, V)$ et $H(T, P)$.

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad ; \quad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

- Établir les valeurs des coefficients calorimétriques L et K pour un système dont l'énergie interne et l'enthalpie ne sont fonctions que de la température. On donnera respectivement L et K en fonction de P et V .

Si l'énergie interne du système ne dépend que de la température il vient que

$$dU = C_V dT \quad \text{donc} \quad L - P = 0 \quad \text{donc} \quad L = P.$$

Si l'enthalpie du système ne dépend que de la température il vient que

$$dH = C_P dT \quad \text{donc} \quad K + V = 0 \quad \text{donc} \quad K = -V.$$

3. Donner l'identité thermodynamique impliquant dU .

$$dU = TdS - PdV.$$

4. On définit de nouvelles fonctions d'état énergie libre $F(T, V)$ et enthalpie libre $G(T, P)$ d'un système par les relations $F = U - TS$ et $G = H - TS$.

Exprimer les différentielles dF et dG d'un système fermé en fonction de T , S , P et V en utilisant l'identité thermodynamique impliquant dU .

D'après la définition de F on peut le différencier de la manière suivante

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT \\ &= TdS - PdV - TdS - SdT \end{aligned}$$

$$dF = -SdT - PdV.$$

D'après la définition de G on peut le différencier de la manière suivante

$$\begin{aligned} dG &= dH - TdS - SdT \\ &= d(U + PV) - PdV - TdS - SdT \\ &= dU + PdV + VdP - PdV - TdS - SdT \\ &= TdS - PdV + PdV + VdP - PdV - TdS - SdT \end{aligned}$$

$$dG = -SdT + VdP.$$

1.2 Détente de Joule et Gay Lussac d'un gaz réel

5. Dans un certain domaine de température et de pression, l'équation d'état d'une mole de gaz réel s'écrit :

$$\left(P + \frac{a^2}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

dans laquelle a , b et R sont des constantes.

Son énergie interne U est telle que

$$U = U_0 + C_0T - \frac{a^2}{V}$$

avec U_0 et C_0 des constantes.

On fait subir à ce gaz une détente de Joule et Gay Lussac qui fait passer son volume de V_1 à $V_2 = 2V_1$. On rappelle les conditions expérimentales pour cette détente :

- enceinte calorifugée et rigide séparée en deux sous-enceintes de volume V_1 et $V_2 - V_1$ par une paroi calorifugée également
- au départ seule la sous-enceinte de volume V_1 contient du gaz, l'autre étant vide
- à $t = 0$, on enlève la paroi.

Montrer que cette détente est isoénergétique $\Delta U = 0$.

Premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W = Q - \int P_{\text{ext}} dV.$$

Le système étant calorifugé $Q = 0$, et comme la pression extérieure est celle du vide $W = 0$. Ainsi

$$\Delta U = 0.$$

La transformation est bien isoénergétique.

6. On note $T_1 = 300\text{K}$ la température initiale du gaz et ΔT la variation de température qu'il subit au cours de cette détente. Exprimer la différentielle d'énergie interne $U(T, V)$ et l'intégrer en utilisant les bornes adéquates.

La différentielle d'énergie interne est

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

soit

$$dU = C_0 dT + \frac{a^2}{V^2} dV.$$

En intégrant il vient que

$$\Delta U = C_0(T + \Delta T - T) - a^2 \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{1}{V_1} \right)$$

$$\Delta U = C_0 \Delta T + \frac{a^2}{2V_1}.$$

7. Exprimer ΔT en fonction de V_1 et de constantes.

Comme la réaction est isoénergétique, il vient que

$$\Delta U = 0 = C_0 \Delta T + \frac{a^2}{2V_1}$$

donc

$$\Delta T = -\frac{a^2}{2C_0 V_1}.$$

8. Calculer ΔT pour $a = 0,135\text{ SI}$, $C_0 = 29,1\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $V_1 = 10\text{L}$.

A.N.

$$\Delta T = -\frac{(0,135\text{ SI})^2}{2 \times 29,1\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 10 \times 10^{-3}\text{ m}^3} = -3,1 \times 10^{-2}\text{ K}.$$

9. Quelle valeur de ΔT aurait-on obtenu dans le cas d'un gaz parfait. Justifier.

Comme la variation d'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa variation de température

$$\Delta U = C_V \Delta T$$

une transformation isentropique, $\Delta U = 0$, est également une transformation isotherme donc $\Delta T = 0$.

10. Montrer que la variation d'entropie du gaz réel ΔS est telle que

$$dS = \frac{C_0}{T} dT + \frac{R}{V-b} dV.$$

On utilise l'identité thermodynamique impliquant dS

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV.$$

On a déjà exprimé la différentielle d'énergie interne dU , ainsi

$$dS = C_0 \frac{dT}{T} + \frac{a^2}{TV^2}dV + \frac{P}{T}dV.$$

On exprime alors $\frac{P}{T}$ à partir de l'équation d'état d'une mole de gaz réel

$$\begin{aligned} P + \frac{a^2}{V^2} &= \frac{RT}{V-b} \\ P &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a^2}{V^2} \\ \frac{P}{T} &= \frac{R}{V-b} - \frac{a^2}{TV^2}. \end{aligned}$$

La différentielle d'entropie devient alors

$$dS = C_0 \frac{dT}{T} + \frac{a^2}{TV^2}dV + \frac{R}{V-b}dV - \frac{a^2}{TV^2}dV.$$

$$dS = C_0 \frac{dT}{T} + \frac{R}{V-b}dV$$

11. Calculer la variation d'entropie du gaz pour $b = 3,2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

En intégrant cette expression il vient que

$$\Delta S = C_0 \ln \left(\frac{T + \Delta T}{T} \right) + R \ln \left(\frac{2V_1 - b}{V_1 - b} \right).$$

A.N.

$$\Delta S = 29,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \times \ln \left(\frac{300 \text{ K} - 3,1 \times 10^{-4} \text{ K}}{300 \text{ K}} \right) + 8,314 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1} \ln \left(\frac{20 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 3,2 \times 10^5 \text{ m}^3}{10 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 3,2 \times 10^5 \text{ m}^3} \right) = 5,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

12. Calculer l'entropie créée S_c . Conclure sur la nature de la transformation.

D'après le second principe de la thermodynamique selon Prigogine il vient que

$$\Delta S = S_c + S_r$$

or $S_r = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ et la transformation est adiabatique, donc $S_r = 0$, donc

$$S_c = \Delta S = 5,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On peut conclure que **la transformation est irréversible**.

2 Diagramme de Clapeyron (P, v) du système liquide-vapeur de l'eau

Adapté du concours communs polytechnique - MP (2007)

On désigne par P la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

13. Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron (P, v) de l'eau. On prendra soin de préciser la position du point critique C, les domaines liquide (L), liquide + vapeur (L+V), et vapeur (V).

Voir cours.

14. Représenter, sur le diagramme précédent l'allure de l'isotherme critique T_C et préciser sa caractéristique.

La caractéristique de l'isotherme critique est qu'elle présente un palier de changement d'état de longueur nulle.

15. Représenter, sur le diagramme précédent l'allure d'une isotherme $T < T_C$.

Voir cours.

16. On désigne par v_m , le volume massique d'un système liquide-vapeur. Montrer que le titre massique en vapeur x est donné par

$$x = \frac{v_m - v_L}{v_G - v_L}.$$

Le système considéré présente une partie vapeur de masse de volume V_G et une partie liquide de volume V_L , le tout valant V ,

$$V = V_G + V_L.$$

On peut introduire les volumiques massiques gazeux v_G et liquide v_L de telle manière que

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_G}{m_G} m_G + \frac{V_L}{m_L} m_L \\ &= v_G m_G + v_L m_L \end{aligned}$$

avec m_G et m_L les masses respectives des parties gazeuses et liquides.

Comme le volume massique du système liquide-vapeur v_m est défini tel que

$$v_m = \frac{V}{m}$$

avec m la masse totale du système, il vient que

$$v_m = v_G \frac{m_G}{m} + v_L \frac{m_L}{m}.$$

On reconnaît alors les titres massiques en vapeur x et en liquide x_L

$$v_m = v_G x + v_L x_L.$$

Comme

$$m = m_G + m_L$$

il vient que

$$\frac{m}{m} = \frac{m_G}{m} + \frac{m_L}{m}$$

soit

$$1 = x + x_L.$$

Ainsi

$$v_m = v_G x + v_L (1 - x)$$

$$v_m - v_L = x(v_G - v_L)$$

$$x = \frac{v_m - v_L}{v_G - v_L}.$$

3 La marche du berger landais sur échasses

Concours commun des instituts nationaux polytechniques - MPI (2024)

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses. Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIII^e siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XX^e siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'*escasse* ("jambe" en patois landais) et le *paouse pé* ("repose pied"), fixé sur l'*escasse*, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse.

On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de "marche à pied augmentée".

Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en Figure 1. Les schémas en Figure 1 et Figure 2 précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

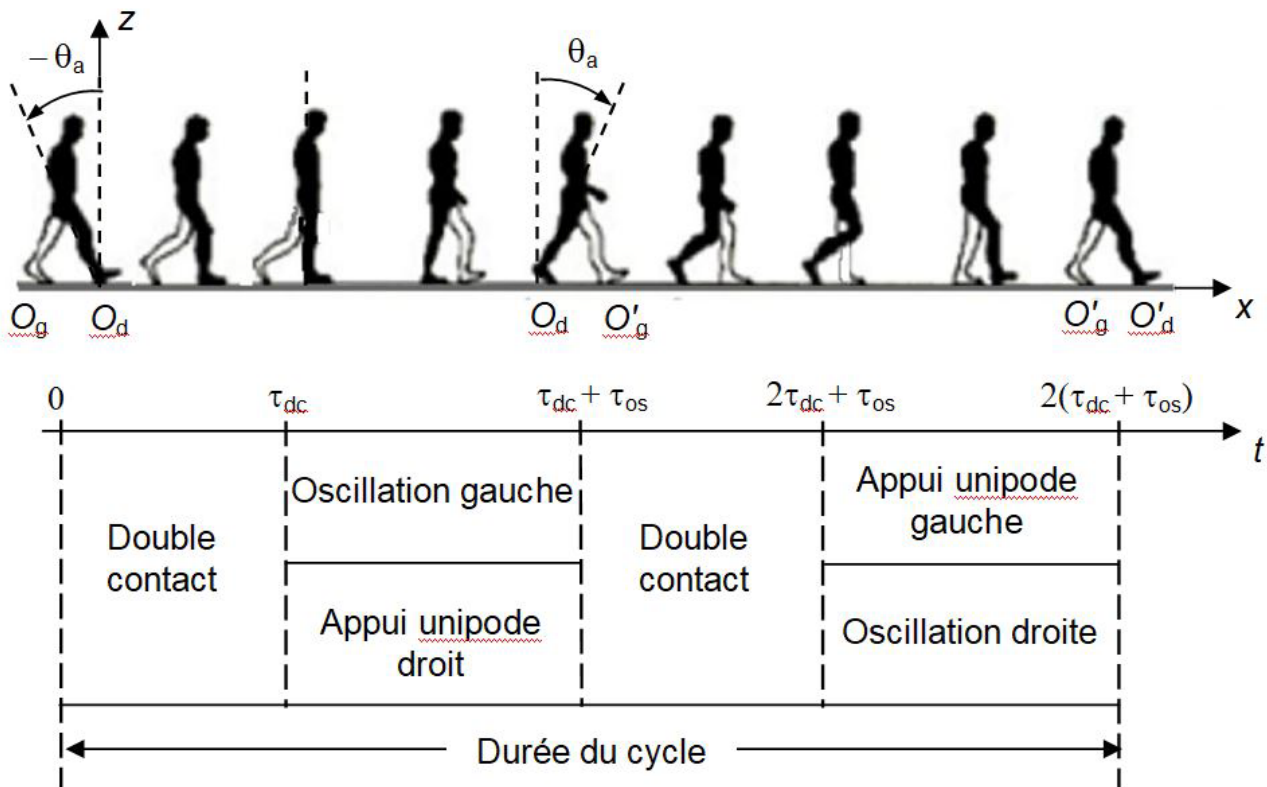


Figure 1: Phases du cycle de la marche.

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

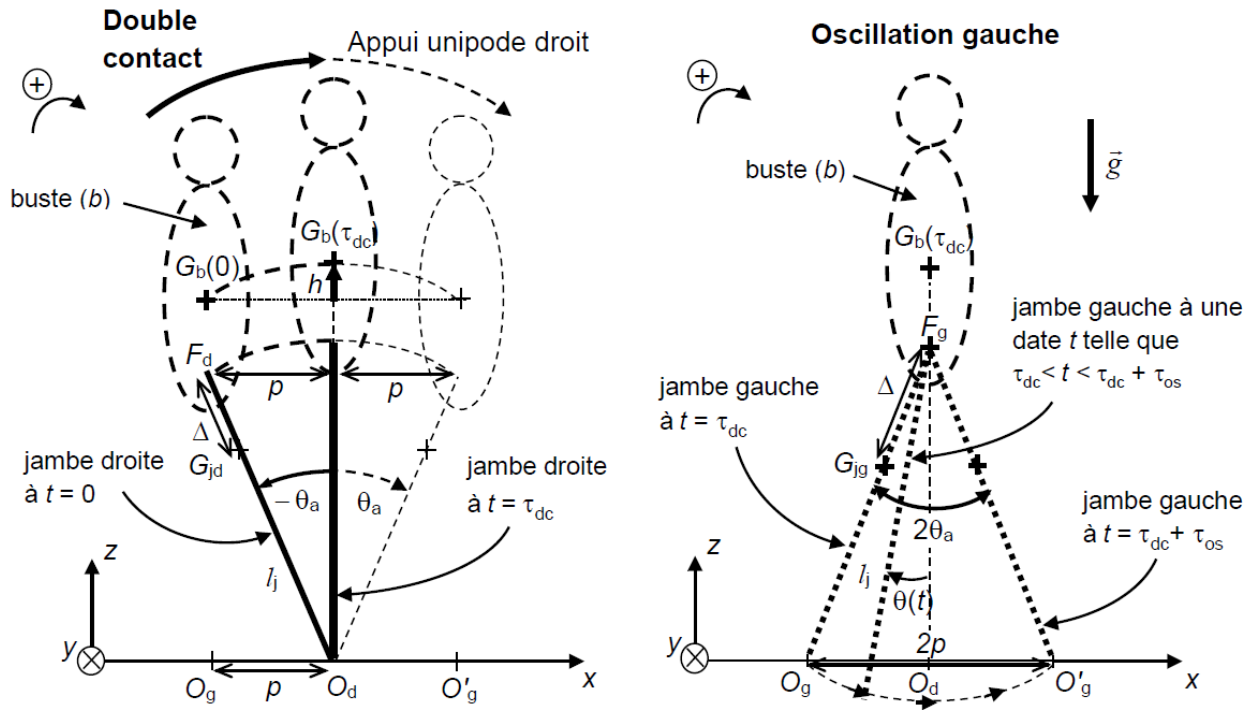


Figure 2: Phase de double contact (figure de gauche) et phase d'oscillation gauche (figure de droite).

■ Phase de double contact

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (Figure 1 et Figure 2 gauche) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

■ Phase d'oscillation gauche

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_{g,y}$ (Figure 2 droite) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la Figure 2 gauche).

■ Appuis au sol et définition du pas

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en $O_{g'}$, à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O_{g'}$ définit le pas de la marche. Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant : chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d), et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé comme un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$.
- $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$).
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

3.1 Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale ascendante (Figure 2 droite).

17. En appliquant le théorème du moment cinétique à (j_g) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ pendant cette phase d'oscillation.

Dans le référentiel du buste supposé galiléen, le théorème du moment cinétique appliqué à la jambe gauche durant la phase d'oscillation gauche est

$$J_F \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_F(\vec{F}_i).$$

En considérant que la liaison pivot est idéale, le seul moment de force impliqué est le moment du poids de la jambe par rapport à l'axe de son pivot fémoral, soit

$$J_F \ddot{\theta} = (\overrightarrow{F_g G_{jg}} \wedge \vec{P}) \cdot (-\vec{u}_y)$$

avec $-\vec{u}_y$ la direction de l'axe de rotation F_g donné par l'orientation de θ et la règle de la main droite.

Ainsi, si on définit la base cylindro-polaire attachée à G_{jg} le centre de gravité de la jambe droite, de vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_y$, ce dernier étant identique à celui de la base cartésienne fournie, il vient que

$$\begin{aligned} J_F \ddot{\theta} &= (\Delta \vec{u}_\rho \wedge (m_{jg} \cos \theta \vec{u}_\rho + m_{jg} \vec{u}_\theta \sin \theta)) \cdot (-\vec{u}_y) \\ &= -m_{jg} \Delta \sin \theta. \end{aligned}$$

L'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ est donc

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_{jg} \Delta}{J_F} \sin \theta$$

18. Dans l'approximation des petits angles, exprimer en fonction de $m - j$, J_F , g et de Δ , la pulsation ω_{os} et la durée τ_{os} de cette phase d'oscillation.

Dans l'approximation des petits angles il vient que

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{m_{jg} \Delta}{J_F} \theta.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_{os} = \sqrt{\frac{m_{jg} \Delta}{J_F}}.$$

La période propre T_{os} correspond à deux fois la durée de la phase d'oscillation τ_{os} , soit

$$\tau_{os} = \frac{T_{os}}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_{os}}$$

donc

$$\tau_{os} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{m_{jg} \Delta}}.$$

3.2 Étude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase de double contact :

- Le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne $\vec{V}_{dc} = V_{dc} \vec{u}_x$ avec $V_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$ (la composante verticale est donc négligée).
- Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de (j_d) et de (j_g) sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétique de (j_d) et de (j_g) sont supposées égales.
- Le mouvement de rotation de (j_d) autour de O_{dy} s'effectue à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$, avec $\Omega(t=0) = 0$.

19. On note $h = z_{G_b}(\tau_{dc}) - z_{G_b}(0)$ la variation d'altitude du point G_b entre les instants de dates $t=0$ et $t=\tau_{dc}$ (Figure 2 gauche). Exprimer la variation $\Delta \mathcal{E}$ de l'énergie mécanique de (Σ) entre ces deux instants, en fonction de J_O , $\Omega(\tau_{dc})$, m_b , g et de h .

On peut mener l'étude de variation de l'énergie mécanique sur chacun des sous système de (Σ) .

- Pour le buste, la variation d'énergie mécanique est telle que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}(b) &= \Delta \mathcal{E}_c(b) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \\ &= \frac{1}{2} m_b (V^2(\tau_{dc}) - V^2(0)) + m_b g (z(\tau_{dc}) - z(0)) \end{aligned}$$

or $V(0) = V(\tau_{dc}) = V_{dc}$, et $z(\tau_{dc}) - z(0) = h$, donc

$$\Delta \mathcal{E}(b) = m_b g h.$$

- D'après la description de la phase de double contact "durant cette phase [...] l'énergie cinétique des deux jambes augmente". D'après l'énoncé, cette variation sera considérée égale pour les deux jambes.

N'ayant pas d'information quant à la variation d'énergie cinétique de la jambe gauche, on utilise celle de la jambe droite, dont la vitesse est connue au cours de cette phase.

Ainsi, la variation d'énergie mécanique des de la jambe droite est telle que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}(j_d) &= \Delta \mathcal{E}_c(b) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \\ &= \frac{1}{2} J_O (\Omega^2(\tau_{dc}) - \Omega^2(0)) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \end{aligned}$$

comme la variation d'énergie potentielle des jambes est négligée, et que la vitesse angulaire Γ de la jambe droite est nulle à l'instant initial, il vient que

$$\Delta \mathcal{E}(j_d) = \frac{1}{2} J_O \Omega^2(\tau_{dc}).$$

Ainsi la variation d'énergie mécanique de l'ensemble du système (Σ) est tel que

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(b) + 2\Delta \mathcal{E}(j_d) = m_b g h + J_O \Omega^2(\tau_{dc}).$$

3.3 Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

20. En supposant quasi-constante la puissance $\mathcal{P}$ fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\tau_{dc}}.$$

Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de $\mathcal{P}$.

Il s'agit du théorème de la puissance mécanique

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées.

21. Avec $h \simeq \frac{p^2}{l_j}$ (expression approchée de h valable pour les petits angles θ_a) et en supposant des conditions de marche telles que $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$ avec ω_{os} la pulsation trouvée à la question 18, montrer que

$$\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{l_j} \right) g V_{dc}.$$

On utilise l'expressions de $\Delta \mathcal{E}$ obtenue plus tôt, on peut réexprimer la puissance fournie par les muscles

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\tau_{dc}} = \frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{\tau_{dc}} + \frac{m_b g h}{\tau_{dc}}.$$

En réexprimant la durée de la phase de double contact τ_{dc} en fonction du pas p et de la vitesse du buste V_{dc} , soit $\tau_{dc} = \frac{p}{V_{dc}}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{p} V_{dc} + \frac{m_b g h}{p} V_{dc}.$$

En réexprimant h la variation d'altitude du point G_b en fonction du pas p et de la longueur d'une jambe l_j , soit $h = \frac{p^2}{l_j}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{p} V_{dc} + \frac{m_b g p^2}{2 l_j p} V_{dc} = \frac{J_O \Omega^2(\tau_{dc})}{p} V_{dc} + \frac{m_b g p}{2 l_j} V_{dc}.$$

Enfin, en considérant la vitesse angulaire de la jambe droite à l'instant final de la phase de double contact égale à la pulsation de l'oscillation de la jambe gauche, soit $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os} = \sqrt{\frac{m_j g \Delta}{J_F}}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_O m_j g \Delta}{J_F p} V_{dc} + \frac{m_b g p}{2 l_j} V_{dc}$$

soit

$$\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2 l_j} \right) g V_{dc}.$$

22. Obtenir l'expression du pas p_{opt} qui minimise $\mathcal{P}$.

L'extremum de la puissance en fonction du pas p est atteint pour

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = 0.$$

Recherchons cet extremum et vérifions qu'il s'agit d'un minimum. soit

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = \left(-\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p_{ext}^2} + \frac{m_b}{2 l_j} \right) g V_{dc}.$$

L'extremum de puissance est atteint pour

$$-\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p_{ext}^2} + \frac{m_b}{2 l_j} = 0 \quad \text{soit} \quad p_{ext} = \sqrt{\frac{2 J_O m_j \Delta l_j}{J_F m_b}}.$$

La courbure de $\mathcal{P}(p)$ est donnée par sa dérivée seconde par rapport à p , soit

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{dp^2} = \frac{2J_O m_j \Delta}{J_F p^3} g V_{dc}.$$

La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction $\mathcal{P}(p)$ est convexe, et $\mathcal{P}(p_{\text{ext}})$ correspond bien à un minimum, soit

$$p_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2J_O m_j \Delta l_j}{J_F m_b}}.$$

23. Application numérique : $l_j = 1 \text{ m}$, $m_j = 10 \text{ kg}$, $m_b = 60 \text{ kg}$, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a alors $\Delta = l_j/2$ et $J_O = J_F$.

Pour une jambe à répartition de masse uniforme il vient que

$$p_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2J_O m_j l_j^2}{2J_O m_b}} = l_j \sqrt{\frac{m_j}{m_b}}.$$

A.N.

$$p_{\text{opt}} = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{10 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}} = 0,4 \text{ m}.$$

Cette valeur est cohérente avec le pas d'une marche tranquille.

3.4 Pas optimal avec des échasses

Soit maintenant un berger monté sur ses échasses. Chacune d'elles est modélisée comme une tige de masse négligeable, de longueur l^* , solidarisée à la jambe et formant avec elle une "jambe équivalente" de longueur $l^* + l_j$. On note E le point de contact entre le sol et l'échasse et J_E^* le moment d'inertie, par rapport à l'axe Ey , de la "jambe équivalente".

24. Parmi les paramètres intervenant dans l'expression de p_{opt} obtenue en 22, indiquer lesquels sont inchangés par rapport au cas sans échasses et lesquels sont à modifier. On précisera ces modifications.
- Le moment d'inertie J_E^* de la jambe équivalente est **différent** de celui de la jambe normale J_O : la distance entre l'axe de rotation Ey et la partie massive de la jambe équivalente (les vraies jambes) est plus grande que la distance entre l'axe de rotation Oy et les vraies jambes, donc $J_E^* > J_O$.
 - La masse m_j des jambes est inchangée car les échasses sont de masses négligeables.
 - La distance Δ entre le pivot fémoral et les centres de masse des jambes est inchangée car les échasses sont de masses négligeables.
 - La longueur $l^* + l_j$ correspondant à la longueur de la jambe équivalente est **différente** de celle de la jambe normale l_j : $l^* + l_j > l_j$.
 - Le moment d'inertie J_F de la jambe équivalente est identique à celui de la jambe normale : on n'augmente pas la distance entre l'axe de rotation Fy et la partie massive de la jambe équivalente (les vraies jambes).
 - La masse du buste m_b est inchangée.
25. En déduire l'expression de p_{opt}^* , puis donner le rapport $\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}}$ en fonction de $\frac{J_E^*}{J_O}$ et de $\frac{l^*}{l_j}$.

L'expression du pas optimal, ou pas minimisant la puissance à fournir par les muscles dans le cas de la jambe avec échasse est donc

$$p_{\text{opt}}^* = \sqrt{\frac{2J_E^* m_j \Delta (l_j + l^*)}{J_F m_b}}.$$

Le rapport entre les deux pas optimaux est

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{2J_E^* m_j \Delta (l_j + l^*)}{J_F m_b} \frac{J_F m_b}{2J_O m_j \Delta l_j}}$$

soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E^*}{J_O} \left(1 + \frac{l^*}{l_j}\right)}.$$

On donne ci-dessous les expressions des moments d'inertie d'une jambe à répartition de masse uniforme, sans ou avec échasse, par rapport à l'axe de rotation au sol.

- Jambe seule en contact avec le sol en O :

$$J_O = \frac{m_j}{3} l_j^2.$$

- Jambe avec échasse en contact avec le sol en E :

$$J_E^* = \frac{m_j}{3} (l_j^2 + 3l^* l_j + 3l^{*2}).$$

26. Exprimer $\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}}$ en fonction du seul rapport $\frac{l^*}{l_j}$ dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme.

On utilise l'expression précédente et on exprime les moments d'inertie à partir des formules données dans le tableau, soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E^* l^*}{J_O l_j}}$$

soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\left(1 + \frac{l^*}{l_j}\right) \left(1 + 3\frac{l^*}{l_j} + 3\left(\frac{l^*}{l_j}\right)^2\right)}.$$

27. Calculer $\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}}$ pour un berger adulte de longueur de jambe $l_j = 1$ m, monté sur des échasses de longueur $l_j^* = 1$ m.

Pour $l_j = l^* = 1$ m, il vient que

A.N.

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{2(1+3+3)} = 3,7.$$

28. Justifier si la durée de la phase oscillante est changée avec les échasses.

On a montré que la durée de la phase oscillante était telle que

$$\tau_{\text{os}} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{m_j g \Delta}}.$$

Or nous avons aussi démontré que les grandeurs impliquées dans l'expression de cette durée ne changeaient pas dans le cas de la marche avec échasse. **Donc, la durée de la phase oscillante est inchangée avec les échasses.**

29. Des études statistiques ont montré, qu'une fois le pas optimal adopté, la vitesse moyenne de déplacement horizontal du marcheur sur un cycle est proportionnelle au pas optimal et à la pulsation de la phase oscillante.

En déduire le rapport $\frac{V^*}{V}$ des vitesses de déplacement du marcheur avec et sans échasses. Commenter.

D'après le résultat des études statistiques nous pouvons récrire le rapport entre les deux vitesses de déplacement. Il vient que

$$\frac{V^*}{V} = \frac{p_{\text{opt}}^* \omega_{\text{os}}}{p_{\text{opt}} \omega_{\text{os}}}.$$

Or comme nous avons établi que les durées de la phase oscillante étaient égales, donc les pulsations ω_{os} également, le rapport des vitesses se réduit au rapport des pas optimaux, soit

$$\frac{V^*}{V} = \frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}}.$$

Or on a vu que dans le cas d'échasse d'une longueur de 1 m, un adulte voyait augmenter son pas d'un facteur proche de 4. **On peut donc bien qualifier cette pratique de "marche augmentée".**

FIN DU SUJET