

Espérance, Variance et inégalités de concentration.

Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

- Espérance $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X)$.
- Formule alternative $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega)$.
- Notion de variable aléatoire centrée.
- Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, inégalité triangulaire. Théorème de transfert.
- $E(1_A) = \mathbb{P}(A)$.
- Si X et Y sont indépendantes on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variance et covariance

- Variance d'une variable aléatoire $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Ecart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- Propriétés : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- Variance d'une v.a ; suivant une loi de Bernouilli et binomiale.
- Covariance de deux variables aléatoires $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.
- Formule $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si deux variables aléatoires sont indépendantes on a $Cov(X, Y) = 0$.
- Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Inégalités probabilistes

- Inégalité de Markov : si $X \geq 0$ et $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si $\epsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| > \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Questions de cours

On demandera en question une définition ou un énoncé de proposition relative aux points listés ci-dessus.