

TD III. Machines thermiques

Exercice III.1. Cycle de Carnot ★

Le cycle Carnot est composé d'une première compression adiabatique et réversible ($A-B$); puis d'une étape de chauffage et de détente isotherme à la température T_{ch} ($B-C$); puis d'une détente adiabatique et réversible ($C-D$); et enfin d'un refroidissement et d'une compression isotherme à la température T_{fr} ($D-A$).

On considère que le gaz utilisé par la machine thermique est un gaz parfait.

1. **Représenter** le cycle moteur de Carnot sur un digramme (P, V).
2. **Donner** le rendement ρ d'un moteur, puis **l'exprimer** en fonction des transferts de chaleur entre le moteur et la source chaude Q_{ch} et la source froide Q_{fr} .
3. **Déterminer** l'échange de chaleur Q_{ch} au cours de l'étape de détente isotherme ($B-C$) en fonction de V_B et de V_C , les volumes du systèmes aux point B et C respectivement.
4. **Déterminer** l'échange de chaleur Q_{fr} au cours de l'étape de compression isotherme ($D-A$) en fonction de V_D et de V_A , les volumes du systèmes aux point D et A respectivement.
5. À partir de la compression adiabatique et réversible ($A-B$), **utiliser** la loi de Lapalce pour **déterminer** une relation entre T_A , T_B , V_A et V_B .
6. À partir de la détente adiabatique et réversible ($C-D$), **utiliser** la loi de Lapalce pour **déterminer** une relation entre T_C , T_D , V_C et V_D .
7. **Rexprimer** le rendement en fonction de T_{ch} et T_{fr} . **Conclure**.

Exercice III.2. Sens d'un cycle monotherme ★ ★

Une mole de gaz parfait ($\gamma = 1,4$) subit la succession de transformation suivante

- détente isotherme de $P_A = 2\text{ bar}$ et $T_A = 300\text{ K}$ jusqu'à $P_B = 1\text{ bar}$, en restant avec un thermostat à $T_T = 300\text{ K}$.
 - évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5\text{ L}$ toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T
 - compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A .
1. **Représenter** ce cycle en diagramme (P, V). **Déterminer** s'il s'agit d'un cycle moteur ou récepteur.
 2. **Déterminer** l'entropie créée entre A et B .
 3. **Calculer** la température en C , le travail W_{BC} et le transfert thermique Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC . **En déduire** l'entropie reçue ou échangée avec le thermostat ainsi que l'entropie créée.
 4. **Calculer** la valeur numérique de l'entropie créée au cours d'un cycle. **Déterminer** si le cycle proposé est réalisable, et si le cycle inverse est réalisable.

Exercice III.3. Cycle de Beau de Rochas ou d'Otto ★ ★

Le fonctionnement d'un moteur à essence peut être modélisé par un cycle appelé cycle de Beau de Rochas ou d'Otto. Ce cycle théorique fut pour la première fois proposé par le physicien français Beau de Rochas en 1862, puis le premier moteur de ce type fut réalisé par l'allemand Otto une quinzaine d'années plus tard.

Ce moteur est aussi appelé moteur à explosion car il est nécessaire de produire une étincelle à l'aide d'une bougie pour provoquer l'inflammation du mélange air-carburant. Sur la figure ci-dessous, on peut comparer le cycle de Beau de Rochas ou d'Otto (à gauche) au cycle réel du moteur à explosion (à droite).

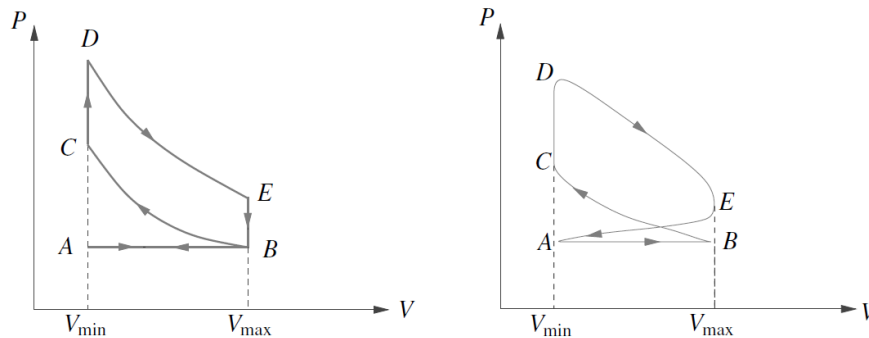


Figure 1 – Cycles théorique et réel du moteur à explosions.

En A le piston est en bout de course et le cylindre offre le volume minimal V_{min} . L'évolution est la suivante :

- 1er temps ($A - B$) : admission, la soupape d'admission est ouverte, le piston descend en aspirant le mélange air-carburant jusqu'au volume V_{max}
- 2ème temps ($B - C$) : à partir de B le piston remonte très rapidement et comprime le gaz jusqu'en C où l'étincelle est produite par la bougie provoquant la combustion ; en C la pression augmente mais le piston n'a pas le temps de bouger et arrive en D
- 3ème temps ($D - E$) : les gaz brûlés sous forte pression repoussent très rapidement le piston.
- 4ème temps ($E - B - A$) : la soupape d'échappement s'ouvre, provoquant une baisse de pression ($E - B$), puis le piston remonte pour refouler les gaz brûlés ($B - A$).

1. D'après le digramme ($P - V$), **qualifier** les transformations $C - D$ et $E - B$.
2. **Déterminer** la phase du cycle au cours le travail W est fourni par le moteur.
3. **Qualifier** les transformations très rapides $D - E$ et $B - C$.

Dans le cas du cycle théorique, on considère que le gaz utilisé par le moteur est parfait et que les transformations $D - E$ et $B - C$ sont réversibles.

4. **Déterminer** les transformations au cours desquelles les échanges thermiques Q_{ch} et Q_{fr} sont établies, et ainsi **déterminer** les sources chaude et froide de températures T_{ch} et T_{fr} .
5. **Exprimer** les échanges thermiques Q_{ch} et Q_{fr} en fonction des températures de certains des points du cycle.
6. **En déduire** le rendement d'un moteur ρ en fonction des températures de certains des points du cycle.
7. **Utiliser** la transformation $D - E$ pour **exprimer** T_E en fonction de T_D , V_{max} et V_{min} .
8. **Utiliser** la transformation $B - C$ pour **exprimer** T_B en fonction de T_C , V_{max} et V_{min} .
9. **Exprimer** le rendement du moteur à explosion en fonction du **taux de compression** V_{max}/V_{min} . **Déterminer** l'évolution du rendement en fonction du taux de compression.
10. **Faire l'application numérique** pour $V_{max}/V_{min} = 10$ et un gaz parfait monoatomique.

Exercice III.4. Moteur de Stirling ★ ★

On considère $n = 40 \times 10^{-3}$ mol d'air, considéré comme un gaz parfait monoatomique subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes à partir de l'état A : $P_1 = 1$ bar et $T_1 = 300$ K

- compression isotherme réversible au contact de la source TH_1 à T_1 , jusqu'à l'état B , de volume $V_2 = V_1/10$
- échauffement isochore au contact thermique de la source TH_2 à $T_2 = 600$ K jusqu'à l'état C de température T_2
- détente isotherme réversible au contact de la source TH_2 jusqu'à l'état D de volume V_1
- refroidissement isochore au contact thermique de la source TH_1 jusqu'à l'état A .

1. **Calculer** les valeurs numériques de P , V et T pour chacun des états A , B , C et D .

Dans l'état A , on sait que $P_A = P_1 = 1$ bar et $T_A = T_1 = 300$ K. Ayant affaire à un gaz parfait, on peut utiliser la loi des gaz parfait pour déterminer $V_A = V_1$.

$$P_A V_A = nRT_A$$

$$V_A = n \frac{nRT_A}{P_A} = \frac{nRT_1}{P_1}.$$

A.N.

$$V_A = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ mol} \times 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 300 \text{ K}}{1 \times 10^5 \text{ Pa}} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ L}.$$

Dans l'état B on obtient le volume $V_B = V_2 = \frac{V_1}{10} = \frac{V_A}{10} = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^3$. La compression étant isotherme et comme il y a contact avec un thermostat de température T_1 de A à B , il vient que $T_B = T_1 = 300$ K. On peut alors déterminer la valeur de pression P_B .

$$P_B V_B = nRT_B$$

$$P_B = n \frac{nRT_A}{V_B} = n \frac{10nRT_1}{V_1} = 10P_1.$$

Le volume ayant été divisé par 10 par rapport à l'état A , il vient que la pression a donc été multipliée par 10 par rapport à l'état A car n et T sont les mêmes dans les deux états. Ainsi $P_B = 10P_A = 10P_1 = 1 \times 10^6$ Pa.

Entre l'état B et C il y a un échauffement isochore donc $V_B = V_C = V_2 = \frac{V_1}{10} = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^3$.

Attention, il y a un changement de thermostat juste après l'état B . L'état B reste le même mais au cours du passage B vers C on met le gaz en contact avec un thermostat de température T_2 qui impose sa température à l'état C .

On peut alors déterminer la valeur de pression P_C .

$$P_C V_C = nRT_C$$

$$P_C = n \frac{nRT_2}{V_2} = n \frac{2nT_1}{V_2} = n \frac{20nT_1}{V_1} = 20P_1.$$

La température ayant été multipliée par 2 par rapport à l'état B , il vient que la pression a donc été multipliée par 2 par rapport à l'état B car n et V sont les mêmes dans les deux états. Ainsi $P_C = 2P_B = 20P_1 = 2 \times 10^6$ Pa.

Entre l'état C et D il y a une détente isotherme donc $T_C = T_D = T_2 = 600$ K. On revient également au volume V_1 tel que $V_D = V_A = V_1 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

On peut alors déterminer la valeur de pression P_D .

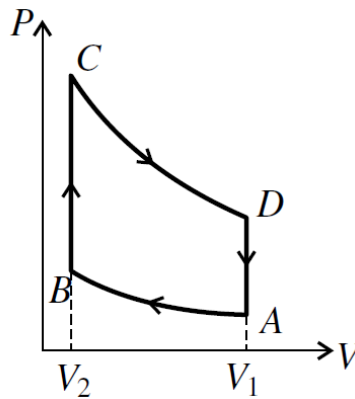
$$P_D V_D = nRT_D$$

$$P_D = n \frac{nRT_2}{V_1} = n \frac{2nT_1}{V_1} = 2P_1.$$

Entre l'état D et A il y a refroidissement isochore. **Attention, il y a un changement de thermostat juste après l'état D .** L'état D reste le même mais au cours du passage D vers A on met le gaz en contact avec un thermostat de température T_1 qui impose sa température à l'état A .

$$A(P_1, V_1, T_1) ; B(10P_1, V_1/10, T_1) ; C(20P_1, V_1/10, 2T_1) ; D(2P_1, V_1, 2T_1).$$

2. **Représenter** le cycle dans le diagramme de Clapeyron (P, V). **Déterminer**, sans calcul, comment savoir si le cycle proposé est celui d'un moteur ou d'un système mécaniquement récepteur. On obtient le cycle ci-dessus.



Le cycle étant parcouru dans le sens horaire, il s'agit d'un cycle moteur.

3. **Calculer** pour chaque étape le transfert thermique et le travail reçu par le fluide. Pour l'étape A vers B la transformation est isotherme réversible. L'énergie interne U des gaz parfait ne dépendant que de la température, il vient que

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = C_V \Delta T = 0.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, il vient que

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = Q_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow B} = 0$$

soit

$$W_{A \rightarrow B} = -Q_{A \rightarrow B}.$$

La transformation étant réversible, elle donc mécaniquement réversible : la pression du système est donc définie à tout instant entre A et B et est égale à la pression extérieure, ainsi

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B P_{\text{ext}} dV = - \int_A^B P dV.$$

D'après la loi des gaz parfaits

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B nRT \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -nRT_1 \ln \left(\frac{1}{10} \right) = nRT_1 \ln(10).$$

Donc

$$Q_{A \rightarrow B} = -nRT_1 \ln(10).$$

A.N.

$$W_{A \rightarrow B} = 40 \times 10^{-3} \text{ mol} \times 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 300 \text{ K} \ln(10) = 230 \text{ J}.$$

$$Q_{A \rightarrow B} = -230 \text{ J}.$$

Le système fourni de la chaleur et reçoit du travail entre A et B .

Entre B et C il y a échauffement isochore du gaz parfait donc

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = C_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

Toujours d'après le premier principe

$$\Delta U_{B \rightarrow C} = Q_{B \rightarrow C} + W_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

Or comme la transformation est isochore

$$W_{B \rightarrow C} = 0$$

et

$$Q_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

A.N.

$$Q_{B \rightarrow C} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ mol} \times 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}{1,7 - 1} \times 300 \text{ K} = 143 \text{ J}.$$

Le système reçoit uniquement de la chaleur.

Pour l'étape C vers D la transformation est isotherme réversible. L'énergie interne U des gaz parfait ne dépendant que de la température, il vient que

$$\Delta U_{C \rightarrow D} = C_V \Delta T = 0.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique, il vient que

$$\Delta U_{C \rightarrow D} = Q_{C \rightarrow D} + W_{C \rightarrow D} = 0$$

soit

$$W_{C \rightarrow D} = -Q_{C \rightarrow D}.$$

La transformation étant réversible, elle donc mécaniquement réversible : la pression du système est donc définie à tout instant entre C et D et est égale à la pression extérieure, ainsi

$$W_{C \rightarrow D} = - \int_C^D P_{\text{ext}} dV = - \int_C^D P dV.$$

D'après la loi des gaz parfaits

$$W_{C \rightarrow D} = - \int_C^D nRT \frac{dV}{V} = -nRT_2 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = -nRT_2 \ln(10) = -2nRT_1 \ln(10).$$

Donc

$$Q_{C \rightarrow D} = 2nRT_1 \ln(10).$$

A.N.

$$W_{C \rightarrow D} = -2 \times 40 \times 10^{-3} \text{ mol} \times 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 300 \text{ K} \ln(10) = -460 \text{ J}.$$

$$Q_{C \rightarrow D} = 460 \text{ J}.$$

Le système reçoit de la chaleur et fournit du travail entre C et D .

Entre D et A il y a refroidissement isochore du gaz parfait donc

$$\Delta U_{D \rightarrow A} = C_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = -\frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

Toujours d'après le premier principe

$$\Delta U_{D \rightarrow A} = Q_{D \rightarrow A} + W_{D \rightarrow A} = -\frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

Or comme la transformation est isochore

$$W_{D \rightarrow A} = 0$$

et

$$Q_{D \rightarrow A} = -\frac{nR}{\gamma - 1} T_1.$$

A.N.

$$Q_{D \rightarrow A} = -\frac{40 \times 10^{-3} \text{ mol} \times 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}{1,7 - 1} \times 300 \text{ K} = -143 \text{ J}.$$

Le système fournit uniquement de la chaleur.

4. **Commenter** ces résultats et **déterminer** s'il on a bien affaire à un cycle moteur.
Le travail total fournit au système est

$$W = W_{A \rightarrow B} + W_{C \rightarrow D} = 230 \text{ J} - 460 \text{ J} = -230 \text{ J}.$$

Cette valeur étant négative, c'est le système qui fournit du travail, comme il se doit pour un moteur.

5. **Déterminer**, sur le plan énergétique, la production de ce système sur un cycle. **Déterminer** quel est le coût sur le plan énergétique. **En déduire** l'expression et la valeur du rendement.

Le contact avec la source chaude se fait juste après le point B jusqu'au point D , le transfert de chaleur de la source chaude vers le système Q_c correspond donc à $Q_{B \rightarrow C} + Q_{C \rightarrow D} = 143 \text{ J} + 460 \text{ J} = 603 \text{ J} > 0$.

Le contact avec la source froide se fait juste après le point D jusqu'au point B , le transfert de chaleur de la source froide vers le système Q_f correspond donc à $Q_{D \rightarrow A} + Q_{A \rightarrow B} = -143 \text{ J} - 230 \text{ J} < 0$.

On a bien un transfert thermique naturel, de la source chaude vers la source froide comme le requière un moteur ditherme.

L'énergie produite, ou énergie "utile" est $W = -230 \text{ J}$.

L'énergie coûteuse, ou énergie "payante" est $Q_c = 603 \text{ J}$.

Le rendement est donc

$$W = -\frac{W}{Q_c} = \frac{230 \text{ J}}{603 \text{ J}} = 38 \text{ \%}.$$

6. **Calculer** l'entropie créée par irréversibilité au sein du système au cours du cycle. **Déterminer** le type d'irréversibilité qui entre en jeu ici.

La variation d'entropie sur un cycle est nul donc

$$\Delta S = S_c + S_r.$$

D'après la définition de l'entropie reçue, il vient que

$$S_c = -S_r = -\left(\frac{Q_{A \rightarrow B}}{T_1} + \frac{Q_{B \rightarrow C}}{T_2} + \frac{Q_{C \rightarrow D}}{T_2} + \frac{Q_{D \rightarrow A}}{T_1}\right).$$

A.N.

$$S_c = -\left(\frac{-230\text{J}}{300\text{K}} + \frac{143\text{J}}{600\text{K}} + \frac{460\text{J}}{600\text{K}} + \frac{-143\text{J}}{300\text{K}}\right) = 0,2\text{J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Ici les phénomènes irréversibles sont dûs au contact thermique avec le thermostat de température T_2 juste après B jusqu'à C , transformation au cours de laquelle le système n'a pas la même température que la source chaude avec qui il est en contact, et uau contact thermique avec le thermostat de température T_1 juste après D jusqu'à A , transformation au cours de laquelle le système n'a pas la même température que la source froide avec qui il est en contact.

L'invention des frères Stirling (1816) a permis d'améliorer considérablement le rendement de la machine précédente. Leur idée est de faire en sorte que le gaz échange du transfert thermique au cours des transformation $B - C$ et $D - A$, non pas avec TH_1 et TH_2 , mais avec un système appelé régénérateur RG n'ayant aucun échange d'énergie avec l'extérieur autre que les échanges avec les gaz au cours des transformations $B - C$ et $D - A$.

7. **Justifier** l'idée des frères Stirling.

Dans ce cas la chaleur fournie par le système entre D et A , n'est plus perdue, elle est utilisée comme chaleur donnée au système entre B et C , ainsi

$$Q_{B \rightarrow C} = -Q_{D \rightarrow A}.$$

8. Dans ces conditions, **déterminer** le rendement. **Estimer** si ce rendement peut encore être amélioré sans changer les sources.

Danc ces conditions le transfert thermique de la source chaude n'est plus

$$Q_c = Q_{B \rightarrow C} + Q_{C \rightarrow D}$$

car $Q_{B \rightarrow C}$ n'est plus "payante" car réutilisée entre D et A . Le transfert thermique de la source chaude se réduit donc à

$$Q_c = Q_{C \rightarrow D}.$$

Ainsi le nouveau rendement est

$$\rho = -\frac{W}{Q_{C \rightarrow D}} = -\frac{(W_{A \rightarrow B} + W_{C \rightarrow D})}{2nRT_1 \ln(10)} = \frac{(nRT_1 \ln(10) - 2nRT_1 \ln(10))}{2nRT_1 \ln(10)} = -\frac{(T_1 - T_2)}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

On retrouve le rendement de Carnot, rendement maximal atteignable par un moteur ditherme. On ne peut pas améliorer ce rendement sans changer les sources.

Exercice III.5. Perte de performante d'un congélateur ★ ★

Un congélateur neuf a un coefficient d'efficacité $e = 2,0$. Un appareil dans lequel on a laissé s'accumuler une couche de glace a une efficacité réduite. On suppose que l'effet de la couche de glace est de multiplier par 2 l'entropie créée pour un même transfert thermique pris à la source froide. L'intérieur du congélateur est à -20°C et la pièce dans laquelle il se trouve à 19°C .

1. **Calculer** numériquement α , rapport entre l'efficacité du congélateur neuf et l'efficacité d'une machine réversible fonctionnant avec les mêmes sources.
2. **Montrer que** ce rapport devient, pour le réfrigérateur usagé

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2 - \alpha}.$$

Calculer α' et l'efficacité réduite e' .