

Concours blanc

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **5 parties indépendantes**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Identités trigonométriques

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & ; & \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & ; & \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.\end{aligned}$$

- $\frac{d}{du}(\arcsin(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

1 Mesure des variations du champ de pesanteur par un pendule pesant

Concours Centrale-Supélec - TSI (2021)

L'instrument de mesure du champ de pesanteur est un gravimètre. Les gravimètres relatifs ne permettent pas d'avoir une valeur précise de la pesanteur, mais ils sont très sensibles à ses variations. Ainsi, on peut cartographier avec précision la différence de pesanteur par rapport à un point choisi comme référence. Les gravimètres à ressort (une masse connue tire plus ou moins sur un ressort dont l'allongement est mesuré) ont une précision allant jusqu'à $1 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. D'autres gravimètres, à supra-conducteur (une masse en métal est mise en lévitation par un champ magnétique), sont encore plus précis, de l'ordre de $1 \times 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Les gravimètres dits absolus permettent la mesure directe de l'intensité du champ de pesanteur. Dans les débuts de la géodésie, on a longtemps utilisé des pendules : pendule de Kater, pendule de Repsold, pendule inversé de Holweck-Lejay.

On étudie ici un éventuel dispositif de mesure plus rudimentaire, basé sur un pendule constitué d'une tige pouvant tourner autour d'un axe Δ incliné d'un angle α constant par rapport à la verticale (Figure 1). L'axe Δ est situé dans le plan (Oyz) . Le fait de choisir un angle α faible fait que la période d'oscillation de la tige sera grande. Les variations de la période d'oscillation dues à des variations du champ de pesanteur seront alors plus faciles à mesurer.

On note $\theta(t)$ l'angle de rotation de la tige par rapport à sa position d'équilibre, c'est-à-dire la position pour laquelle le centre d'inertie de la tige a une altitude z minimale.

On adopte les hypothèses suivantes :

- le référentiel d'étude est supposé galiléen ;
- la liaison pivot au point d'attache O entre la tige et l'axe est supposée parfaite ;
- les frottements sont négligés.

La tige est supposée homogène, de longueur $2l$ et de masse m . Elle a pour moment d'inertie $J = \frac{4}{3}ml^2$ par rapport à l'axe Δ .

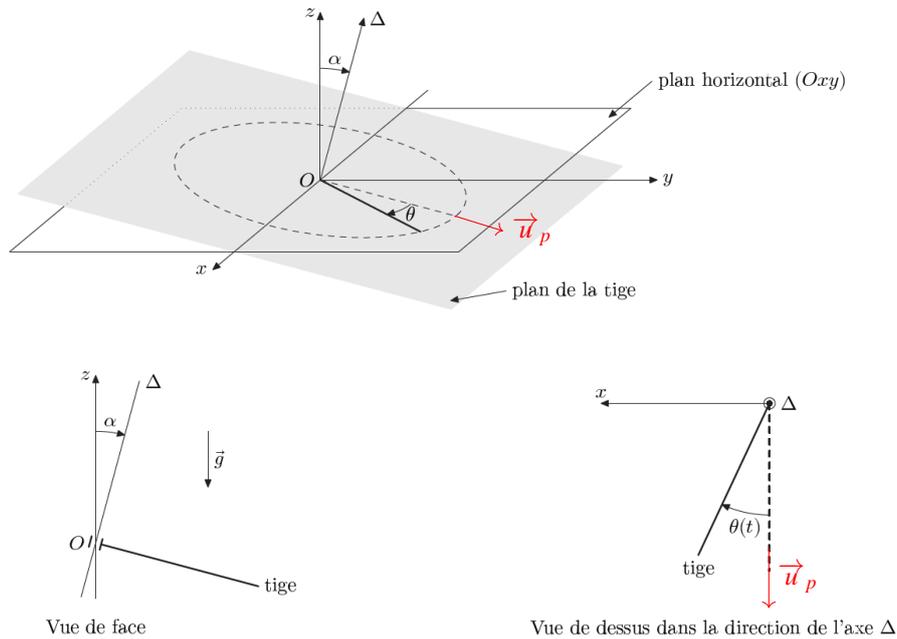


Figure 1: Schéma du pendule pesant.

- Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur \mathcal{E}_p de la tige en fonction de m , g , l , α et θ .

L'énergie potentielle de la tige est donnée par la formule

$$\mathcal{E}_p = mgz + cst$$

avec z l'altitude du centre d'inertie de la tige par rapport à l'origine O . On obtient la valeur de la constante en annulant l'énergie potentielle au niveau de l'origine, soit $cst = 0$.

Le vecteur position du centre d'inertie de la tige \vec{OG} tourne dans un plan. Pour obtenir l'altitude de G , soit la projection de \vec{OG} sur l'axe (Oz) , il faut d'abord projeter \vec{OG} sur droite qui fait un angle constant avec l'axe (Oz) . Il s'agit de la droite dessinée en pointillés sur la figure du dessus. Après projection de \vec{OG} sur cette droite, on pourra projeter cette projection sur l'axe (Oz) .

On attribue à la droite en pointillés le vecteur unitaire \vec{u}_p qui fait un angle $\theta(t)$ avec le vecteur \vec{OG} , sa projection vaut donc

$$OG_p = \vec{OG} \cdot \vec{u}_p = l \cos \theta(t).$$

Finalement la projection du vecteur $\vec{OG}_p = l \cos \theta(t) \vec{u}_p$ sur l'axe (Oz) , nous donne l'altitude du centre d'inertie, soit

$$z_G = \vec{OG}_p \cdot \vec{u}_z = -l \cos \theta(t) \sin \alpha.$$

Le signe "moins" tient compte du fait que la projection du vecteur \vec{u}_p sur l'axe (Oz) est négative.

Ainsi l'énergie potentielle de la tige est

$$\mathcal{E}_p = -mgl \cos \theta(t) \sin \alpha.$$

- En utilisant une méthode énergétique, montrer que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \alpha \sin(\theta(t)) = 0.$$

Comme on néglige les frottements, la tige n'est soumise qu'à son poids. De plus, la liaison pivot étant considérée parfaite, le moment des forces qu'elles exercent sur la tige est nul, leur puissance est donc nulle également. On peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique, soit

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i^{NC}) = 0.$$

Ainsi l'énergie mécanique se conserve, on peut l'exprimer en fonction de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de la tige, soit

$$\mathcal{E}_m = \text{cst} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t) - mgl \cos(\theta(t)) \sin \alpha$$

avec $\dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire de la tige.

En dérivant cette relation, il vient que

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = J\ddot{\theta}(t)\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \sin \alpha.$$

Comme on recherche une solution non triviale pour laquelle $\dot{\theta}(t) \neq 0$, on peut diviser l'équation précédente par $\dot{\theta}(t)$, ainsi

$$0 = J\ddot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) \sin \alpha$$

soit

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{J} \sin(\theta(t)) \sin \alpha = 0.$$

Or le moment d'inertie de la tige est tel que $J = \frac{4}{3}ml^2$, il vient que

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{3g}{4l} \sin(\theta(t)) \sin \alpha = 0.$$

On se limite à partir de maintenant à des oscillations de faible amplitude. On note T_0 la période des oscillations de la même tige mais dans un plan vertical, soit pour 90° .

3. Exprimer la période T des oscillations de tige en fonction de α et de T_0 . Commenter le choix de α .

Si on se restreint à des oscillations de faibles amplitudes, on peut effectuer le développement limité d'ordre 1 en 0 pour $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$, il vient alors que

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{3g}{4l} \theta \sin \alpha = 0.$$

On reconnaît l'équation différentielle du deuxième ordre caractéristique de l'oscillateur harmonique d'équation

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

avec θ_0 l'angle à l'origine à déterminer à partir de la condition initiale sur $\theta(t)$ et ω la pulsation de la tige telle que

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4l} \sin \alpha}.$$

On obtient alors la période d'oscillation T de la tige telle que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4l}{3g \sin \alpha}}.$$

Lorsque la tige est à la verticale, soit $\alpha = 90^\circ$, il vient que

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4l}{3g}}.$$

On peut alors exprimer T en fonction de T_0

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\sin \alpha}}.$$

On définit la sensibilité du dispositif de mesure par la grandeur

$$\sigma = \left| \frac{\Delta T}{\Delta g} \right|$$

avec ΔT la variation de la période T engendrée par une variation Δg du champ de pesanteur. On fait l'hypothèse que $\Delta T \ll T$ et que $\Delta g \ll g$.

4. Exprimer σ en fonction de l , α et g .

Considérons une petite variation du champ de pesanteur Δg , la différence entre les périodes d'oscillations de la tige $T(g)$ et $T(g + \Delta g)$ est donc

$$\Delta T = T(g + \Delta g) - T(g) = 2\pi \sqrt{\frac{4l}{3 \sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{g + \Delta g}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \right)$$

soit

$$\Delta T = 2\pi \sqrt{\frac{4l}{3g \sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta g}{g}}} - 1 \right).$$

Comme $\Delta g \ll g$, on peut utiliser le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $(1+x)^a \approx 1+ax$ lorsque $x \ll 1$, soit

$$\Delta T \approx 2\pi \sqrt{\frac{4l}{3g \sin \alpha}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} - 1 \right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g^3 \sin \alpha}} \Delta g.$$

Ainsi, la sensibilité σ définie telle que

$$\sigma = \left| \frac{\Delta T}{\Delta g} \right|$$

est

$$\sigma = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g^3 \sin \alpha}}.$$

On cherche à mettre en évidence une anomalie gravitationnelle $\Delta g = 1 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5. De quel angle α en degrés doit-on incliner l'axe de rotation Δ si l'on souhaite que cela corresponde à une variation $\Delta T = 1 \text{ ms}$ avec une tige de longueur égale à 1 m ? Commenter.

La sensibilité est définie telle que

$$\sigma = \left| \frac{\Delta T}{\Delta g} \right|.$$

On peut la lier à l'expression précédente

$$\sigma = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g^3 \sin \alpha}}.$$

Ainsi pour une valeur d'anomalie gravitationnelle Δg , une variation de la période d'oscillation de la tige ΔT , et une longueur de tige l fixées la valeur de l'angle α est tel que

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{4\pi^2 \Delta g^2 l}{3g^3 \Delta T^2} \right).$$

A.N.

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{4\pi^2 \times (1 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2 \times 1 \text{ m}}{3 \times (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^3 \times (1 \times 10^{-3} \text{ s})^2} \right) = 8 \times 10^{-3} \text{ }^\circ.$$

On constate que l'angle α à imposer est très faible, c'est donc une méthode délicate à mettre en place.

2 Chauffe-eau thermodynamique

Concours e3a - TSI (2021)

On s'intéresse à la pompe à chaleur d'un chauffe-eau thermodynamique schématisé sur la Figure 2.

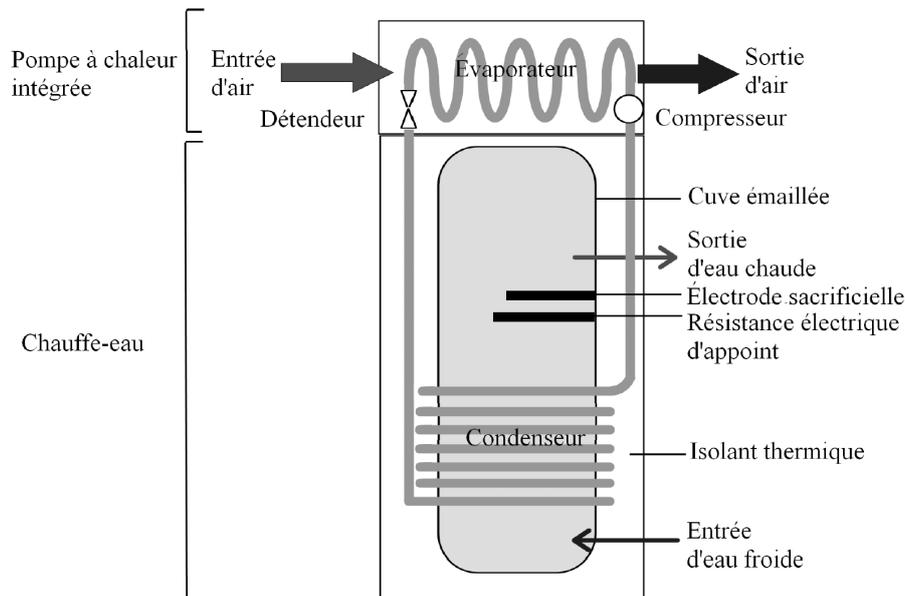
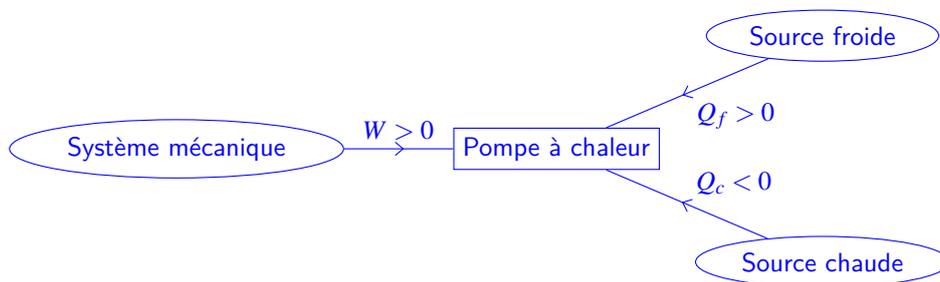


Figure 2: Schéma descriptif d'un chauffe-eau thermodynamique.

6. Rappeler le schéma de principe d'une pompe à chaleur ditherme et préciser le signe des échanges d'énergie W , Q_f et Q_c .



7. Quel élément joue le rôle de source froide et quel élément joue le rôle de source chaude ?

L'extérieur de l'habitation, plus froid, joue le rôle de source froide ; l'intérieur de l'habitation, plus chaud, joue le rôle de source chaude.

On rappelle que le cycle de Carnot se compose de deux transformations isothermes aux températures T_c et T_f et de deux transformations adiabatiques réversibles.

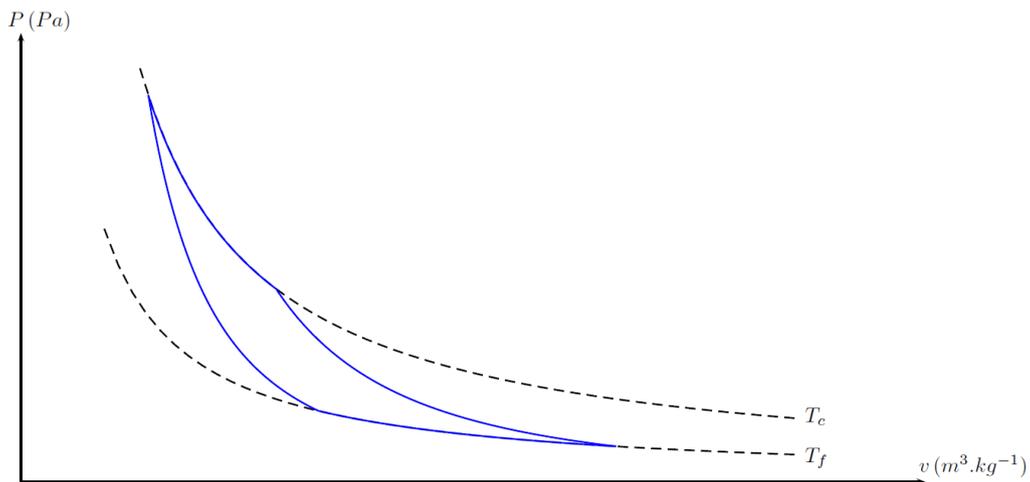
8. Définir une transformation isotherme et une transformation adiabatique.

Une transformation isotherme est une transformation au cours de laquelle la température du système est constante.
 Une transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle l'échange thermique Q est nul.

9. Schématiser ce cycle en diagramme de Clapeyron (P, v). Justifier le sens du cycle.

Une transformation adiabatique et réversible est, d'après l'énoncé du second principe, une transformation isentropique

$$\Delta S = S_r + S_c = \frac{Q}{T} + 0 = 0.$$



Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique car la pompe à chaleur reçoit du travail $W > 0$.

10. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.

Au cours d'un cycle, l'énergie interne finale est égale à l'énergie interne initiale donc

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 = Q_c + Q_f + W$$

donc

$$W = -Q_c - Q_f.$$

11. Appliquer le second principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.

Au cours d'un cycle, l'entropie finale est égale à l'entropie initiale donc

$$\Delta S = S_f - S_i = 0 = S_r + S_c = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + 0$$

donc

$$\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}.$$

12. Définir le coefficient de performance (ou efficacité) d'une pompe à chaleur.

Le coefficient de performance ou efficacité d'une pompe à chaleur est la valeur absolue du rapport entre l'énergie utile et l'énergie "payante", soit

$$\eta = \left| \frac{Q_c}{W} \right| = \frac{-Q_c}{W}.$$

13. En déduire l'expression du coefficient de performance maximal COP_{max} en fonction de T_c et T_f .

L'efficacité maximale est obtenue lorsqu'on considère que le cycle est réversible, ainsi, d'après les questions précédentes il vient que

$$COP_{max} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

soit

$$COP_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

14. Effectuer l'application numérique en utilisant les données de la question suivante.

On utilise les données de la question suivante $T_c \equiv T_{e2} = 338\text{ K}$ et $T_f \equiv T_a = 280\text{ K}$.

A.N.

$$COP_{max} = \frac{338\text{ K}}{338\text{ K} - 280\text{ K}} = 5,83.$$

15. Dans ces conditions d'utilisation ($T_a = 280\text{ K}$ et $T_{e2} = 338\text{ K}$), le constructeur annonce un $COP = 3,6$. Pour quelle raison est-il différent du COP_{max} ?

Le constructeur tient compte du fait que le cycle réalisé par la pompe à chaleur n'est pas réversible, il faut tenir compte des phénomènes irréversibles liés au terme de création d'entropie qui diminue l'efficacité des machines thermiques.

3 La chasse au péritio

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (peryton), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 3, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en $x = 0$, P une plaque métallique placée en $x = D = 46\text{ cm}$, A une antenne placée en $x = d$ reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle E_{tot}^2 \rangle$ du champ électromagnétique émis par E et de valeur $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$ au niveau de l'antenne A.

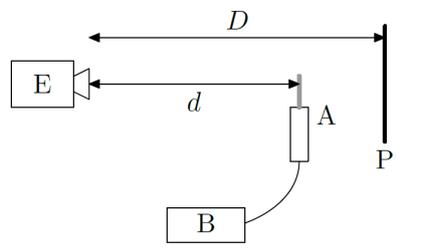


Figure 3: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position $x = d$ entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 4.

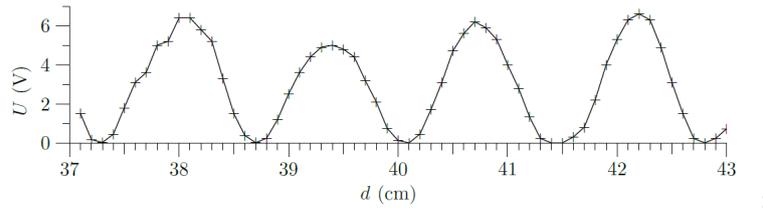


Figure 4: Tension U en fonction de la distance $x = d$ entre l'antenne et l'émetteur.

16. Une partie de l'onde est réfléchiée par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchiée vers les x négatifs. Vérifier qu'en $x = D$ l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.

À t_0 le signal part de $x_0 = 0$ et se propage vers les x positifs jusqu'à $x_1 = D$ à $t_1 > t_0$. La relation entre t_0 et t_1 est

$$t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{c} = t_0 + \frac{D}{c}.$$

À t_1 le signal part de $x_1 = D$ et se propage vers les x négatifs jusqu'à $x_2 < D$ à $t_2 > t_1$. La relation entre t_1 et t_2 est

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1 - x_2}{c} = t_1 + \frac{D - x_2}{c}$$

car $D - x_2 > 0$. On obtient donc la relation entre t_0 et t_2

$$t_2 = t_0 + \frac{D}{c} + \frac{D - x_2}{c} = t_0 + \frac{x_2 - 2D}{c}$$

donc

$$t_0 = t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}.$$

On connaît l'expression du signal à t_0 lorsque l'onde est émise au niveau de la source en $x_0 = 0$

$$E(x_0, t_0) = E_0 \cos(\omega t_0 + kx_0) = E_0 \cos(\omega t_0) = E(t_0).$$

On voit qu'en x_0 le signal n'est que fonction du temps. Pour obtenir l'expression du signal en t_2 on tient compte du retard de ce signal en utilisant l'expression précédente mais pour laquelle on a exprimé t_0 en fonction de t_2 .

$$E(t_0) = E\left(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}\right)$$

$$E_0 \cos(\omega t_0) = E_0 \cos\left(\omega \left(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}\right)\right)$$

donc

$$E(x_2, t_2) = E_0 \cos\left(\omega \left(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}\right)\right) = E_0 \cos(\omega t_2 + k(x_2 - 2D)).$$

Cela est vrai pour tout signaux mesuré en x à l'instant associé t , donc le signal réfléchi est tel que

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D)).$$

Pour $x = D$ on voit que le signal est

$$E(x = D, t) = E_0 \cos(\omega t + k(D - 2D)) = E_0 \cos(\omega t - kD).$$

On constate qu'on a bien affaire à l'expression du signal se propageant vers les x positifs en $x = D$.

17. L'onde réfléchi a en réalité une amplitude égale à $-E_0$ et pas E_0 , car la réflexion implique un déphasage de π . Exprimer la valeur du champ électromagnétique total E_{tot} dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

L'onde réfléchi en x a donc un signal tel que

$$E(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D)).$$

En la sommant avec le signal de l'onde progressive $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$, il vient que

$$E_{\text{tot}} = E_0 \cos(\omega t - kx) - E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D))$$

$$E_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x - 2D))).$$

On reconnaît une expression de la forme $\cos(a - b) - \cos(a + b)$ avec

$$a - b = \omega t - kx$$

$$a + b = \omega t + k(x - 2D)$$

donc en sommant les deux dernières relations, et en calculant leur différence

$$2a = 2\omega t - 2kD$$

$$-2b = -2kx + 2kD$$

soit

$$a = \omega t - kD$$

$$b = k(x - D).$$

En utilisant les identités trigonométriques, il peut voir que $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ donc

$$E_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x - 2D)))$$

$$E_{\text{tot}} = 2E_0 (\sin(\omega t - kD) \sin(k(x - D))).$$

18. Déterminer la condition sur x pour que E_{tot} s'annule. On voit, grâce à l'expression précédente que E_{tot} s'annule pour des valeurs de x telles que $\sin(k(x - D)) = 0$, soit

$$k(x - D) = m\pi$$

avec m un entier relatif. soit

$$x_m = m\pi \frac{1}{k} + D = x = m\pi \frac{\lambda}{2\pi} + D$$

$$x_m = m \frac{\lambda}{2} + D$$

avec x_m les valeurs de x pour lesquelles E_{tot} s'annule.

19. Déterminer l'écart entre deux position x consécutives pour lesquelles E_{tot} s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 4 la valeur de la fréquence f de l'onde électromagnétique. Si on prend les positions x_{m+1} et x_m , la différence de ces positions est

$$x_{m+1} - x_m = (m+1) \frac{\lambda}{2} + D - \left(m \frac{\lambda}{2} + D \right)$$

$$x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2}.$$

D'après la Figure 4 on voit que l'écart moyen entre deux annulations de la tension, donc annulation de E_{tot} est $\frac{x_{m+4}-x_m}{4} = \frac{42,8\text{cm}-37,3\text{cm}}{4} = 1,375\text{cm}$. L'incertitude $u(x_{m+4} - x_m) = \frac{u(x_m)}{4\sqrt{3}} = \frac{0,1\text{cm}}{4\sqrt{3}} = 0,01\text{cm}$. Ainsi

$$x_{m+1} - x_m = (1,38 \pm 0,01\text{cm}).$$

Donc

$$\lambda = 2(x_{m+1} - x_m) \pm 2u(x_{m+1} - x_m) = (2,76 \pm 0,02)\text{cm}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \pm \frac{c}{\lambda^2}u(\lambda) = (10,9\text{GHz} \pm 0,08\text{GHz}).$$

20. Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1\text{GHz}$, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6\text{GHz}$. Déterminer l'incertitude sur votre valeur de f obtenue plus tôt et comparer votre mesure avec la fréquence annoncée par le constructeur à l'aide de l'outil adapté. On a obtenu l'incertitude plus tôt. Pour comparer notre valeur à celle du constructeur on peut utiliser le Z-score.

$$Z = \frac{|f - f_{\text{cons}}|}{\sqrt{u^2(f) + u^2(f_{\text{const}})}}.$$

A.N.

$$Z = \frac{|10,9 - 11|}{\sqrt{(0,08)^2 + (0,6)^2}} = 0,17.$$

Le Z-score est inférieur à 2, les deux valeurs sont compatibles.

4 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la Figure 5.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (Figure 5) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

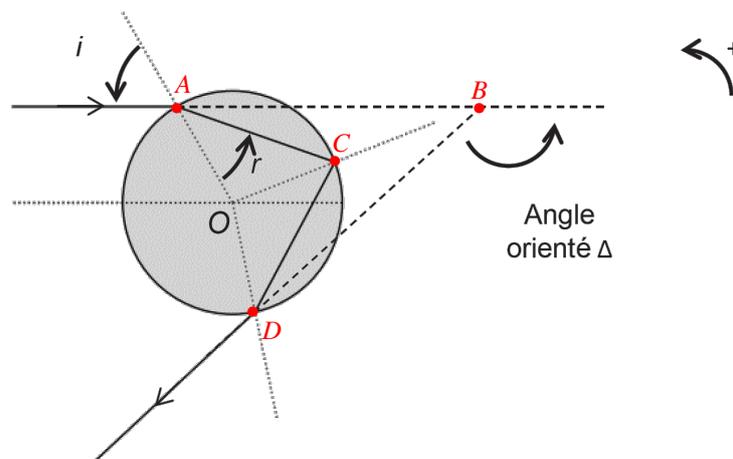


Figure 5: Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

21. **Rappeler** les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

La loi de Snell-Descartes de la réfraction est telle que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

On l'appliquant ici, il vient que

$$n_{\text{air}} \sin i = n \sin r$$

soit

$$\sin i = n \sin r.$$

22. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (Figure 5).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin i$.

Afin de déterminer l'angle Δ , on peut déterminer l'angle \widehat{ABD} , car on voit que cet angle et Δ sont liés de telle manière que $\pi = \widehat{ABD} + \Delta$.

Pour déterminer l'angle \widehat{ABD} , on va déterminer les angles \widehat{ABC} et \widehat{CBD} , car on voit que $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$.

Commençons par le triangle ACB . Dans ce triangle on voit que l'angle \widehat{CAB} est tel que $\widehat{CAB} = \widehat{OAB} - \widehat{OAC}$, or $\widehat{OAC} = r$, et d'après la loi des angles alterne-interne, $\widehat{OAB} = i$, donc $\widehat{CAB} = i - r$.

Dans le triangle OAC , on constate que les côtés OA et OC sont des rayons du cercle de centre O , ils sont donc égaux et ce triangle est isocèle. Ainsi, les angles \widehat{OAC} et \widehat{OCA} sont égaux et valent r .

À partir de l'angle $\widehat{OCA} = r$, on peut obtenir la valeur de l'angle \widehat{BCA} , car on voit que $\pi = \widehat{BCA} + \widehat{OCA}$, soit $\pi = \widehat{BCA} + r$, donc $\widehat{BCA} = \pi - r$.

Ayant obtenu $\widehat{CAB} = i - r$ et $\widehat{BCA} = \pi - r$, on peut obtenir \widehat{ABC} , car $\pi = \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}$, soit

$$\widehat{ABC} = \pi - \widehat{CAB} - \widehat{BCA} = \pi - (i - r) - (\pi - r) = 2r - i.$$

De plus, on voit que le triangle OCD est identique au triangle OCA , donc les triangles OAB et OCB sont aussi identiques, ainsi l'angle $\widehat{CBD} = \widehat{ABC}$, donc

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{ABC} = 4r - 2i.$$

Finalement

$$\Delta = \pi - \widehat{ABD} = \pi - 4r + 2i.$$

On exprime maintenant Δ en fonction de n et $x = \sin i$. On voit d'abord que $i = \arcsin x$. Ensuite grâce à la loi de la réfraction, on sait que $\sin i = n \sin r$, soit $x = n \sin r$, donc $\sin r = \frac{x}{n}$, soit $\arcsin(\sin r) = r = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$. Ainsi

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin x.$$

23. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin i_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Afin de déterminer l'extremum de la fonction $\Delta(x)$, il faut déterminer la valeur de $x = x_m$ pour laquelle sa dérivée par rapport à x s'annule, soit $\frac{d\Delta(x)}{dx} = 0$.

En utilisant les données de l'énoncé, il vient que

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Cette expression s'annule pour $x = x_m$, soit

$$0 = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_m^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1-x_m^2}} \quad ; \quad 2 \frac{1}{\sqrt{1-x_m^2}} = \frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_m^2}{n^2}}} \quad ; \quad \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{1-x_m^2}{1-\frac{x_m^2}{n^2}}} \quad ;$$

$$\frac{n^2}{4} = \frac{1-x_m^2}{1-\frac{x_m^2}{n^2}} \quad ; \quad n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \quad ; \quad 3x_m^2 = 4 - n^2 \quad \text{donc}$$

$$x_m = \pm \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

Comme $x_m = \sin i_m$ et que l'on s'intéresse aux valeurs positives de i_m , on retiendra seulement la valeur positive de x_m .

24. **Justifier** à l'aide de la Figure 6 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

Sur la Figure 6, on constate qu'autour de la valeur i_m , l'angle d'incidence peut prendre de nombreuses valeurs (par exemple entre 40° et 80°) pour lesquelles la déviation $\Delta(x_m) + \delta$ sera proche de $\Delta(x_m)$. Ce qui signifie que de nombreux rayons incidents d'angle d'incidence de valeurs plus ou moins différentes de i_m vont émerger dans une direction similaire, **il y a donc accumulations de nombreux rayons lumineux de différentes incidences dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.**

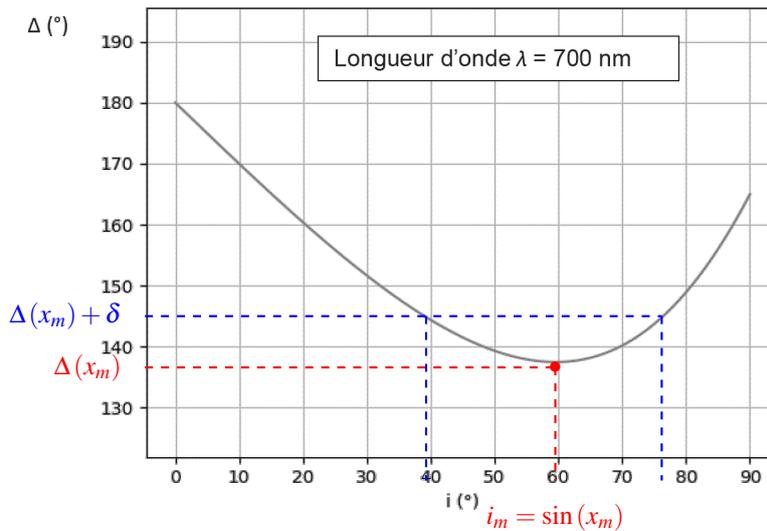


Figure 6: Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

25. **Calculer** x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400\text{nm}$, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700\text{nm}$, $n = 1,330$).

Dans le cas du violet

A.N.

$$x_{m,v} = \sqrt{\frac{4-n_v^2}{3}} = \sqrt{\frac{4-1,343^2}{3}} = 0,856.$$

$$\Delta(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,v}}{n_v}\right) + 2 \arcsin(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,856}{1,343}\right) + 2 \arcsin(0,856) = 2,432 \text{ rad} = 139,4^\circ.$$

Dans le cas du rouge

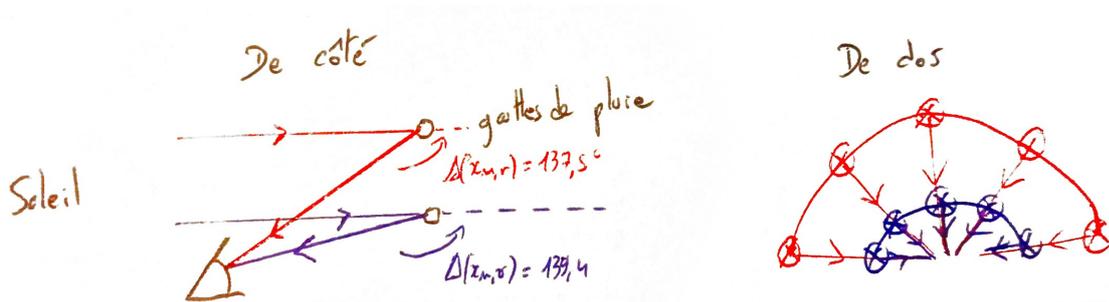
A.N.

$$x_{m,r} = \sqrt{\frac{4 - n_r^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 - 1,330^2}{3}} = 0,862.$$

$$\Delta(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,r}}{n_r}\right) + 2 \arcsin(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,862}{1,330}\right) + 2 \arcsin(0,862) = 2,400 \text{ rad} = 137,5^\circ.$$

26. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'oeil de l'observateur, **tracer** les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

L'observateur observe des rayons rouges et violets, ces rayons arrivent donc au niveau de ses yeux. On sait que le violet a subi une plus grande déviation que le rouge, donc d'après le schéma, l'observateur voit le rayon rouge à l'extérieur de l'arc.



5 L'accordeur de guitare

Adapté du concours CCS TSI (2019)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences f_{ac} (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .

- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un ordinateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la Figure 7.

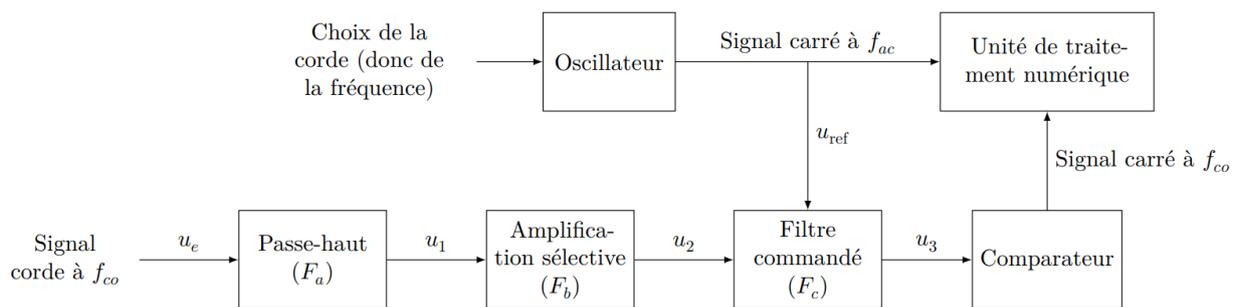


Figure 7: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

5.1 Le signal

La Figure 8 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

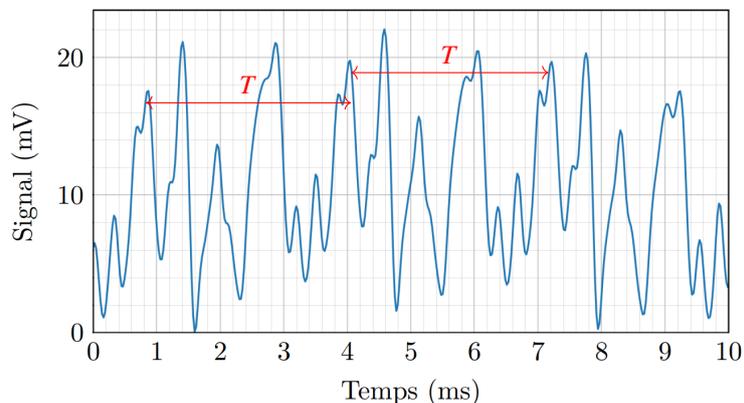


Figure 8: Signal de la guitare

27. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

On constate que le signal oscille d'une valeur proche de 10 mV. **La valeur moyenne est donc de 10 mV**, c'est également l'amplitude de la composante continue du signal.

28. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

On voit qu'une forme caractéristique du signal se répète deux fois entre 0,8 ms et 7,2 ms, la période de ce signal est donc

A.N.

$$T = \frac{7,2 \times 10^{-3} \text{ s} - 0,8 \times 10^{-3} \text{ s}}{2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

la fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz.}$$

29. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

D'après le Tableau 1, il s'agirait de **la corde Mi aiguë**.

30. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Le signal, supposé périodique, ne correspond pas à un signal sinusoïdal. Or, on sait que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'un développement de Fourier, soit d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes. Donc ce signal a bien des harmoniques. Les fréquences de ces harmoniques sont multiples de la fréquence du fondamental. Ce signal présente de nombreuses discontinuités, l'amplitude des harmoniques de rang élevé est donc importante.

5.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 9 (filtre (F_a)).

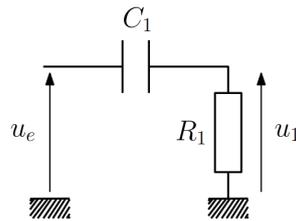


Figure 9: Filtre (F_a)

31. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.

En effectuant un pont diviseur de tension pour obtenir la tension complexe \underline{u}_1 du résistor de résistance R_1 il vient que

$$\underline{u}_1 = u_e \frac{Z_{R_1}}{Z_{R_1} + Z_{C_1}} = u_e \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = u_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

La fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ est donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{u_e} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

32. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Il s'agit d'un **filtre passe-haut** de fonction de transfert canonique

$$H(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On peut identifier la pulsation caractéristique $\omega_1 \equiv \omega_0$ en égalisant les dénominateurs des deux expressions de la fonction de transfert

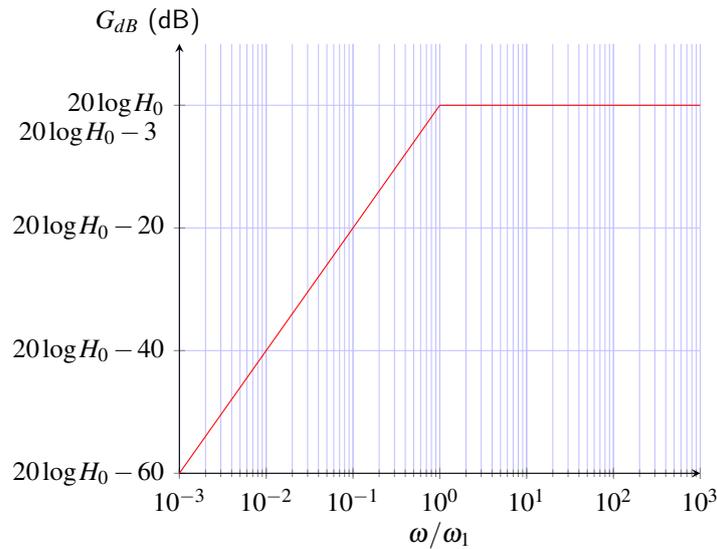
$$1 + jR_1C_1\omega = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$$

soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$$

Il s'agit de la pulsation en dessous de laquelle le gain en décibel du filtre diminue selon une droite asymptote de -20 dB lorsque les pulsations diminuent de une décade, soit la pulsation de coupure, la pulsation à partir de laquelle les basses fréquences sont coupées.

33. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.



34. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

La fréquence de coupure f_1 est définie telle que

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \times R_1C_1}$$

soit

A.N.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \Omega \times 100 \times 10^{-9} \text{nF}} = 15,9\text{Hz.}$$

D'après l'allure du signal, ce filtre **permet de supprimer la composante continu** à $f = 0\text{Hz}$, seule composante ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Le signal a alors une valeur moyenne nulle.

5.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} .

5.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 10 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

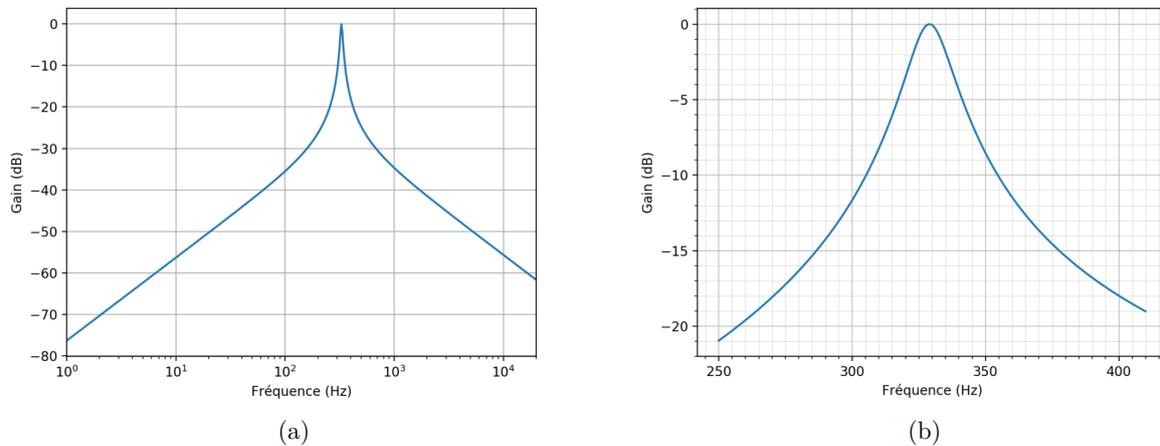


Figure 10: Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

35. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

On constate qu'il s'agit d'un **filtre passe-bande** : il filtre les basses et les hautes fréquences autour d'une certaine fréquence caractéristique.

Cette fréquence est la fréquence pour laquelle le gain et le gain en décibel est maximal. Elle correspond à une valeur de 330Hz d'après la Figure 10.

36. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

On peut estimer que la bande passante à -3 dB correspond à la largeur en fréquence pour laquelle le gain en décibel est supérieur au gain maximal $G_{dB}(\omega_0) - 3$ dB, soit ici -3 dB.

Toujours d'après la Figure 10, cette bande passante notée Δf est

$$\Delta f \approx 340\text{Hz} - 320\text{Hz} = 20\text{Hz}.$$

37. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

La composante fondamentale est la composante de fréquence f_{co} , donc, d'après la Figure 10, le gain en décibel pour une fréquence $f_{co} = 315\text{Hz}$ est $G_{dB}(f_{co}) = -6\text{dB}$, le gain $G(f_{co})$ est défini tel que

$$G_{dB}(f_{co}) = 20\log(G(f_{co}))$$

donc

$$G(f_{co}) = 10^{G_{dB}(f_{co})/20}.$$

A.N.

$$G(f_{co}) = 10^{-6/20} = \frac{1}{2}.$$

5.3.2 Analyse spectrale

La Figure 11 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la Figure 8.

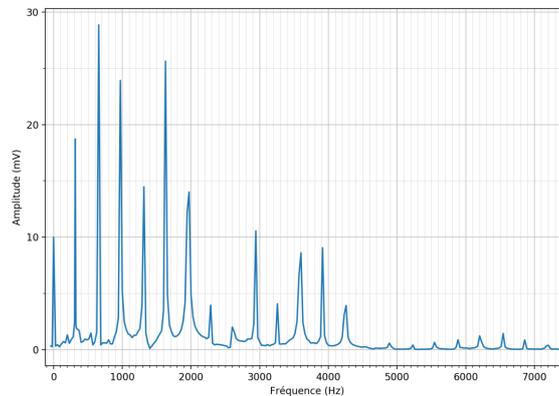


Figure 11: Spectre du signal d'entrée u_e

38. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 8.

On constate d'abord que la composante continue à 0Hz a une amplitude de 10mV, ce qui correspond bien à la valeur estimée au début.

De plus, on observe que le fondamental, donc le pic de première fréquence après la fréquence nulle, correspond à une fréquence proche de 300Hz, ce qui correspond également à la valeur estimée au début.

Enfin, on constate que tous les harmoniques sont espacés de près de 300Hz, donc de fréquences multiples de celle du fondamental.

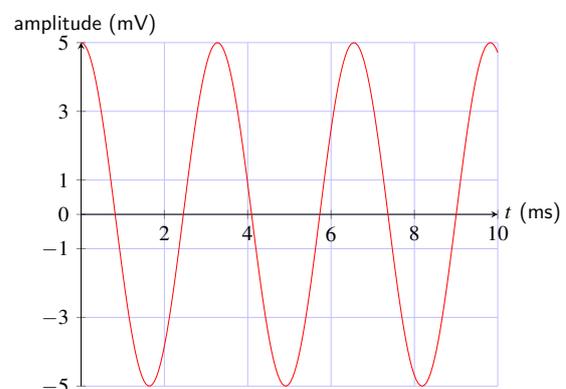
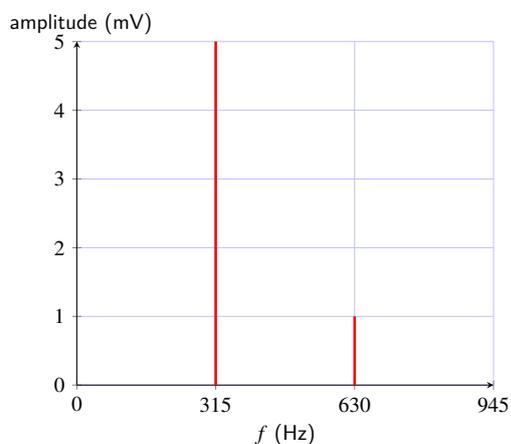
39. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 12 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

En sortant du premier filtre (F_a), seule la composante continue est supprimée, le spectre en sortie est donc identique au spectre d'entrée, exceptée la composante continue à 0Hz, **il s'agit donc du spectre (a)**.

40. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

En sortir du filtre passe-bande (F_c), seule le fondamental à $f_{co} = 315\text{Hz}$ et l'harmonique de rang 2, donc de fréquence $2f_{co} = 630\text{Hz}$, subsistent. D'après l'étude précédente, l'amplitude du fondamental est divisé par deux, et l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est fortement amorti.

Le fondamental, ayant une amplitude beaucoup plus importante que l'harmonique de rang 2, le signal en sortie du filtre (F_c) correspond quasiment au fondamental seul, soit un signal sinusoïdal de fréquence $f_{co} = 315\text{Hz}$, donc de période 3ms.



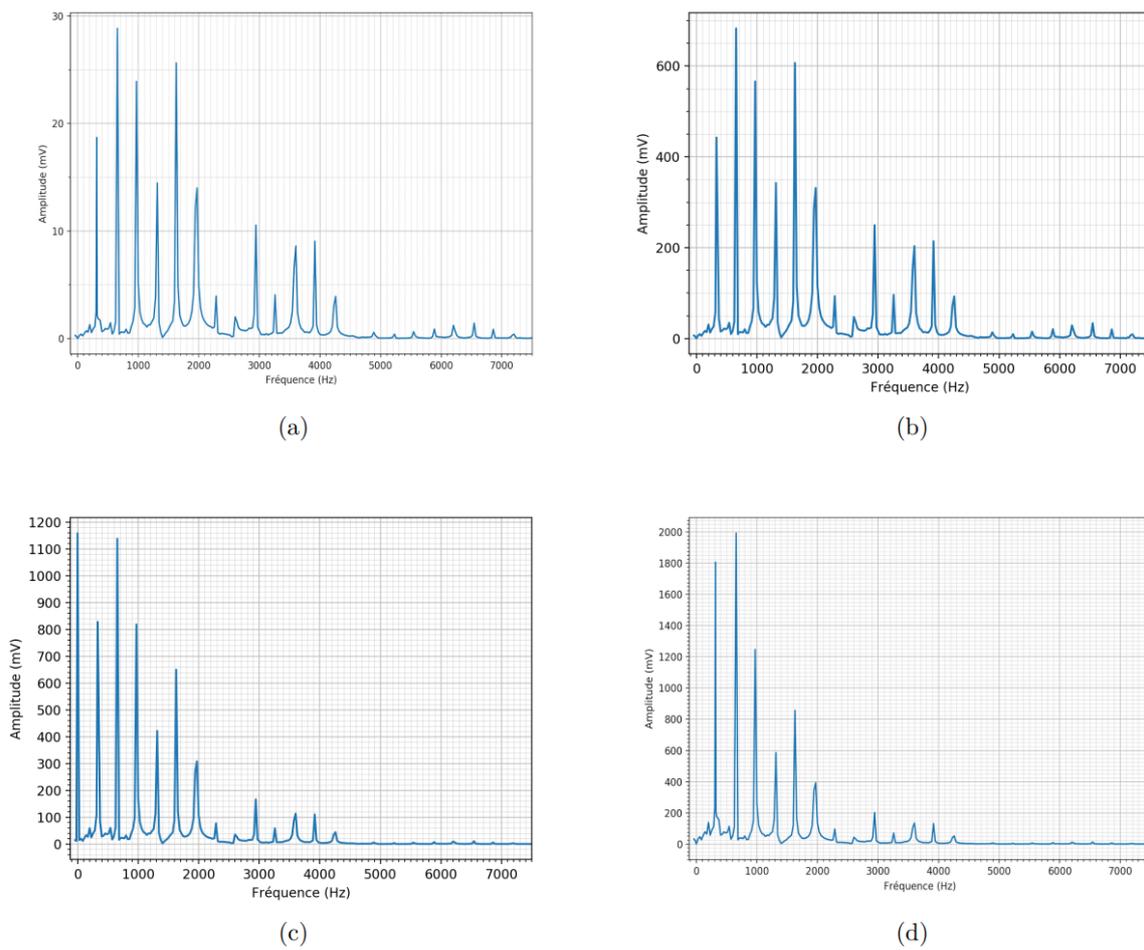


Figure 12: Spectres

FIN DU SUJET