DS 7 - Induction

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en **2 parties indépendantes**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

---

1 Étude d'un alternateur

Concours Centrale-Supélec - PSI (2023)

On modélise le rotor d'un alternateur par une spire circulaire de surface S parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ et tournant sans frottement autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω, dans une région où existe un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$, perpendiculaire à l'axe de rotation Figure 1. Le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la spire est orienté en accord avec le courant $i(t)$. On considère qu'à $t = 0$, $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires de même sens. On note R la résistance et L l'inductance propre de la spire.

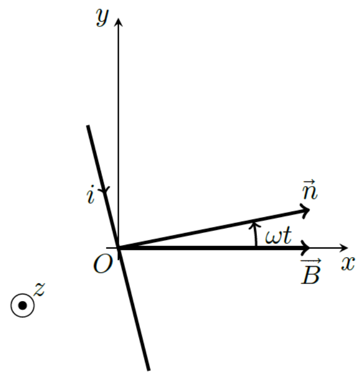


Figure 1: Schéma de l'alternateur.

1. Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire en régime sinusoïdal forcé.

La spire correspond a un circuit RL série alimenté par une f.é.m qui, d'après la loi de Faraday, est

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(BS\cos(\omega t)\right) = BS\omega\sin(\omega t) = BS\omega\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

D'après la loi des mailles, il vient que

$$e = u_R + u_L$$
$$e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

On étudie le système en régime sinusoïdal permanent. En représentation complexe, il vient que

$$\underline{e} = BS\omega e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \underline{i} = \underline{I_0}e^{j\omega t}.$$

Ainsi

$$BS\omega e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{I}_0\left(R + j\omega L\right)$$
$$\underline{I}_0 = \frac{BS\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}}{R + j\omega L}.$$

La norme de l'intensité du courant est donc

$$\|\underline{I}_0\| = \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

La phase à l'origine de l'intensité du courant est donc

$$\arg\left(\underline{I}_0\right) = \arg\left(NBS\omega\right) + \arg\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) - \arg\left(R + j\omega L\right)$$
$$\arg\left(\underline{I}_0\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Ainsi

$$i(t) = \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$i(t) = \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$
$$i(t) = \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left(\sin\left(\omega t\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right) - \cos\left(\omega t\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right).$$

En utilisant un triangle rectangle avec un angle $\varphi = \arctan\left(\frac{x}{1}\right)$ de côté opposé x et de côté adjacent 1, il vient que

$$\cos\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\arctan\left(x\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ainsi

$$i(t) = \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}\left(\sin\left(\omega t\right) - \left(\frac{\omega L}{R}\right)\cos\left(\omega t\right)\right)$$
$$= \frac{BS\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left(\sin\left(\omega t\right) - \left(\frac{\omega L}{R}\right)\cos\left(\omega t\right)\right)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin\left(\omega t\right) - \omega L\cos\left(\omega t\right)\right).}$$

2. Obtenir l'expression de la valeur moyenne de la projection sur l'axe (Oz) du moment du couple exercé par $\vec{B}$ sur la spire en rotation. Interpréter son signe.

   Exprimons le couple de Laplace qui s'exerce sur la spire

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i(t)S\vec{n} \wedge B\vec{u}_x = -i(t)SB\sin\left(\omega t\right)\vec{u}_z$$
$$\vec{\Gamma} = -\frac{B^2S^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin^2\left(\omega t\right) - \omega L\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\right)\vec{u}_z$$
$$\Gamma = \vec{\Gamma}\cdot\vec{u}_z = -\frac{B^2S^2\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\left(R\sin^2\left(\omega t\right) - \omega L\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\right).$$

   Ainsi la valeur moyenne du couple est

$$\boxed{\langle\Gamma\rangle = -\frac{R\omega\left(BS\right)^2}{2\left(R^2 + L^2\omega^2\right)}.}$$

   Le signe du couple moyen est négatif, il s'agit donc d'un c**ouple résistant qui s'oppose au mouvement de la spire**. Il faut donc fournir de l'énergie à la spire pour qu'elle tourne.

3. Déterminer la puissance mécanique moyenne de la turbine qui entraîne le rotor de cet alternateur, ainsi que la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Comparer ces deux puissances.

   La puissance mécanique moyenne de la turbine qui entraîne le rotor de cet alternateur est

$$P_m = \left\langle \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} \right\rangle = \langle \Gamma \vec{u}_z \cdot \omega \vec{u}_z \rangle = -\frac{R(\omega BS)^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)}.$$

   La puissance dissipée par effet Joule est

$$\begin{aligned} P_J &= \langle u_R \times i \rangle = \left\langle Ri^2 \right\rangle = R\left\langle i^2 \right\rangle \\ &= R\left(\frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)^2 \left\langle R^2 \sin^2(\omega t) - 2RL\omega \sin(\omega t)\cos(\omega L) + \omega^2 L^2 \cos^2(\omega t) \right\rangle \\ &= R\left(\frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)^2 \frac{1}{2}(R^2 + L^2\omega^2) \\ &= \frac{R(\omega BS)^2}{2(R^2 + L^2\omega^2)}. \end{aligned}$$

   On constate que la somme des deux puissances est nulle : il y a conservation de l'énergie électromécanique sans perte, **l'énergie mécanique fournie à l'alternateur est totalement convertie en énergie électrique**.

2 Étude d'un haut-parleur électrodynamique

Concours e3a - PSI (2021)

On représente sur la Figure 2 ci-dessous un haut-parleur électrodynamique. Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe $(X'X)$, de résistance R, d'inductance propre L, solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction $(X'X)$ normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique $x(t)$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k. De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit $\overrightarrow{F}_f = -\alpha \overrightarrow{v}$. On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.

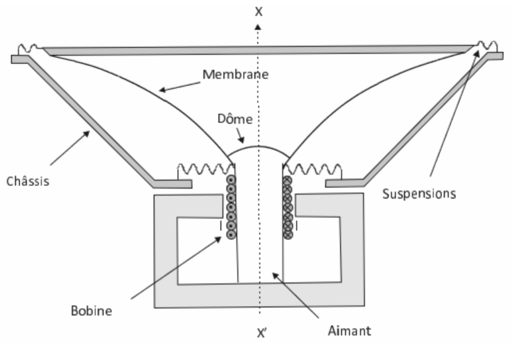


Figure 2: Schéma du haut-parleur de l'étude.

La bobine est placée dans un champ magnétique radial $\overrightarrow{B}$, uniforme en norme, normal à $(X'X)$, créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la Figure 3. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.) $E(t)$ délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur l qui se déplace de $x(t)$. Cette grandeur $x(t)$ représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur l_0. La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note m_T la masse du système (barre, haut-parleur). On suppose donc que la verticale est définie par l'axe z, l'axe x étant horizontal. On note $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ la base des vecteurs unitaires de la Figure 3.

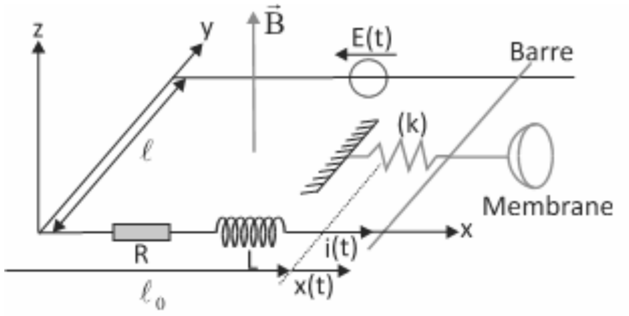


Figure 3: Configuration des rails de Laplace de l'étude.

4. Montrer que la f.é.m. induite e dans le cadre vaut $e = -Blv(t)$ où $v(t)$ est la vitesse, dérivée de $x(t)$.

   Le flux magnétique du circuit φ est tel que

$$\varphi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS = Bl\left(x(t) + l_0\right)$$

   en considérant le vecteur $\overrightarrow{S} = l\left(x(t) + l_0\right)\overrightarrow{u}_z$.

   Ainsi, d'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite e est telle que

$$e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -Bl\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t) + l_0\right) = -Bl\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

   soit

$$\boxed{e = -Bl\dot{x}(t) = -Blv(t).}$$

5. Déduire de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera $i(t)$ le courant induit dans ce circuit.

   On applique la loi des mailles au circuit, soit

$$E(t) + e - u_R - u_L = 0$$

   donc

$$\boxed{E(t) - Blv(t) - Ri(t) - L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

6. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble (barre + haut-parleur) de masse m_T. En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

   On s'intéresse aux forces orienté dans le plan (Oxy), les forces orientées selon (Oz) se compensant car la barre est immobile dans cette direction.

   La barre est soumise à la force de rappel du ressort $F_r = -kx(t)$, une force de frottement fluide $F_f = -\alpha v(t) = -\alpha\dot{x}(t)$ et la force de Laplace telle que

$$F_L = \left(i(t)l\overrightarrow{u}_y \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u}_x = i(t)Bl.$$

   Pour obtenir l'équation mécanique, on utilise le PFD

$$\boxed{m_T\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t) + i(t)Bl.}$$

7. Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

   On effectue le bilan de puissance électrique en multipliant l'équation électrique par $i(t)$, soit

$$E(t)i(t) - i(t)Bl\dot{x}(t) - Ri^2(t) - Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

   On effectue le bilan de puissance mécanique en multipliant l'équation mécanique par $v(t) = \dot{x}(t)$, soit

$$m_T\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = -kx(t)\dot{x}(t) - \alpha\dot{x}^2(t) + i(t)Bl\dot{x}(t).$$

   On remarque que le terme $i(t)Bl\dot{x}(t)$ est commun aux deux équations, on peut donc les sommer pour le faire disparaître tel que

$$m_T\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = -kx(t)\dot{x}(t) - \alpha\dot{x}^2(t) + E(t)i(t) - Ri^2(t) - Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

   soit

$$E(t)i(t) = m_T\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + kx(t)\dot{x}(t) + \alpha\dot{x}^2(t) + Ri^2(t) + Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

   On identifie les différents termes de puissances et d'énergie, soit

$$P_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_T\dot{x}^2(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2(t)\right) + P_f + P_J + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)$$
$$P_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_c + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_p + P_f + P_J + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{mag}$$

   soit

$$\boxed{P_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_m + P_f + P_J + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{mag}}$$

   avec P_G la puissance fournie par le générateur de f.é.m., $\mathscr{E}_c$ l'énergie cinétique de la barre et de la membrane, $\mathscr{E}_p$ l'énergie potentielle de la barre et de la membrane, $\mathscr{E}_p$ l'énergie mécanique de la barre et de la membrane, P_f la puissance des forces de frottement, P_J la puissance dissipée par effet Joule et $\mathscr{E}_{mag}$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine.

   La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par les frottements et l'effet Joule, en partie stockée dans la bobine et en partie exploitée pour mettre la barre en mouvement.

8. Comparer la puissance de la f.é.m. induite P_{fem} à la puissance de la force de Laplace P_L.

   La puissance de la f.é.m. induite P_{fem} est telle que

$$P_{fem} = e(t)i(t) = -i(t)Blv(t) = -i(t)Bl\dot{x}(t).$$

   La puissance de la force de Laplace P_L est telle que

$$P_L = \overrightarrow{F}_L \cdot \overrightarrow{v}(t) = i(t)Bl\overrightarrow{u}_x \cdot \dot{x}(t)\overrightarrow{u}_x = i(t)Bl\dot{x}(t).$$

   On constate que

$$\boxed{P_{fem} = -P_L.}$$

   Il y a conversion totale de la puissance de Laplace en puissance électrique.

9. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω. On utilisera les notations complexes, pour lesquelles $\underline{E}(t) = E_0\exp(j\omega t)$, $E(t)$ s'identifiant alors avec la partie réelle de $\underline{E}(t)$. Montrer que l'on a

$$\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\,\underline{i} = \underline{Z}\underline{i}$$

   où $\underline{i}$ est le courant complexe traversant le circuit et $\underline{Z}_m$ est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de B, l, α, m_T, ω et k.

En régime permanent l'intensité du courant a la même pulsation que la tension imposée au circuit, ainsi, en utilisant la méthode complexe sur l'équation électrique

$$\underline{E}(t) - j\omega Bl\underline{x}(t) - R\underline{i}(t) - jL\omega\underline{i}(t) = 0.$$

Il faut exprimer $\underline{x}(t)$ en fonction de $\underline{i}(t)$ à partir de l'équation mécanique en notation complexe

$$-\omega^2 m_T\underline{x}(t) = -k\underline{x}(t) - j\omega\alpha\underline{x}(t) + Bl\underline{i}(t)$$

soit

$$\underline{x}(t) = \frac{Bl}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}\underline{i}(t)$$

donc

$$\underline{E}(t) - \frac{j\omega(Bl)^2}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}\underline{i}(t) - R\underline{i}(t) - j\omega\underline{i}(t) = 0$$

$$\boxed{\underline{E}(t) = \left(R + jL\omega + \frac{j\omega(Bl)^2}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}\right)\underline{i}(t).}$$

On identifie l'impédance motionnelle $\underline{Z}_m$

$$\boxed{\underline{Z}_m = \frac{j\omega(Bl)^2}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}.}$$

10. Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ peut s'écrire sous la forme

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}.$$

Donner l'expression des termes R_m, C_m et L_m en fonction de B, l, α, m_T et k.

L'admittance motionelle $\underline{Y}_m$ est telle que

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}{j\omega(Bl)^2} = \frac{k}{j(Bl)^2\omega} + j\frac{m_T}{(Bl)^2}\omega + \frac{\alpha}{(Bl)^2}.$$

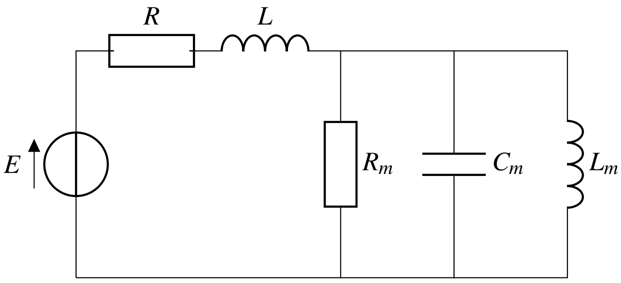
On peut identifier les différentes termes

$$\boxed{\begin{cases} R_m = \frac{(Bl)^2}{\alpha} \\ C_m = \frac{m_T}{(Bl)^2} \\ L_m = \frac{(Bl)^2}{k}. \end{cases}}$$

11. Déduire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

L'admittance équivalente correspond à la somme de l'admittance d'un résistor de résistance R_m, d'un condensateur de capacité C_m et d'une bobine d'inductance L_m.

Le circuit électrique est donc composé de trois impédance R, $j\omega L$ et $\underline{Z}_m$, donc trois éléments branchés en série : un résistor, une bobine et le dipôle composé des trois éléments R_m, C_m et L_m en parallèle. Cela correspond au circuit illustré ci-dessous.



Le rendement η du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

12. Montrer que la relation établie à la question 7 devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi

$$\langle Ei\rangle = \left\langle Ri^2\right\rangle + \left\langle \alpha v^2\right\rangle.$$

Commenter ce résultat.

D'après la question 7 le bilan de puissance du système est

$$E(t)i(t) = m_T\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + kx(t)\dot{x}(t) + \alpha\dot{x}^2(t) + Ri^2(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t).$$

En régime périodique établi, l'intensité $i(t)$ et la position $x(t)$ sont des grandeurs périodiques telles que

$$\begin{cases} i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i) \\ \frac{i(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega I_m\sin(\omega t + \varphi_i) \\ x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi_x) \\ \dot{x}(t) = -\omega X_m\sin(\omega t + \varphi_x) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m\cos(\omega t + \varphi_x). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(t)i(t) &= m_T\omega^3X_m^2\cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\omega t + \varphi_x) - k\omega X_m^2\cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\omega t + \varphi_x) + \alpha\dot{x}^2(t) + Ri^2(t) \\ &\quad - L\omega I_m^2\cos(\omega t + \varphi_i)\sin(\omega t + \varphi_i) \\ &= m_T\omega^3X_m^2\frac{1}{2}(\sin(2\omega + 2\varphi_x) + \sin 0) - k\omega X_m^2\frac{1}{2}(\sin(2\omega + 2\varphi_x) + \sin 0) + \alpha\dot{x}^2(t) + Ri^2(t) \\ &\quad - L\omega I_m^2\frac{1}{2}(\sin(2\omega + 2\varphi_i) + \sin 0) \end{aligned}$$

La moyenne temporelle de cette relation est

$$\boxed{\langle E(t)i(t)\rangle = \left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle + \left\langle Ri^2(t)\right\rangle}$$

car la moyenne temporelle d'une fonction sinusoïdale dépendante du temps est nulle.

13. En identifiant la puissance émise par l'onde sonore $\langle P_{son}\rangle$ à $\left\langle \alpha v^2\right\rangle$, où v est la vitesse de la membrane, montrer que η est de la forme

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}.$$

On donnera les expressions de Q et ω_0 en fonction de α, m_T et k.

Le rendement η du haut-parleur est le rapport entre la puissance moyenne émise par l'onde sonore $\left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle$ et la puissance moyenne fournie par la source de tension $\langle E(t)i(t)\rangle$, soit

$$\eta = \frac{\left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle}{\langle E(t)i(t)\rangle} = \frac{\left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle}{\left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle + \left\langle Ri^2(t)\right\rangle} = \frac{1}{1 + \frac{\left\langle Ri^2(t)\right\rangle}{\left\langle \alpha\dot{x}^2(t)\right\rangle}}.$$

Or on a montré question 9 que $\underline{i}(t)$ et $\underline{x}(t)$ était liés de telle manière que

$$\underline{x}(t) = \frac{Bl}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}\underline{i}(t)$$

ainsi

$$\underline{\dot{x}}(t) = \frac{j\omega Bl}{k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha}\underline{i}(t)$$

donc

$$|\dot{x}| = \frac{\omega Bl}{\sqrt{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + \omega^2\alpha^2}} I_m$$

et

$$\begin{aligned}\arg\left(\dot{x}\right) &= \arg\left(j\omega Bl\right) - \arg\left(k - m_T\omega^2 + j\omega\alpha\right) + \arg\left(\underline{i}(t)\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega\alpha}{k - m_T\omega^2}\right) + \omega t + \varphi_i.\end{aligned}$$

On peut donc exprimer la position $x(t)$ de la barre et et l'intensité $i(t)$ dans le circuit

$$\begin{cases} i(t) = I_m\cos\left(\omega t + \varphi_i\right)\\ x(t) = -\frac{\omega Bl}{\sqrt{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + \omega^2\alpha^2}} I_m \sin\left(\omega t + \varphi_i - \arctan\left(\frac{\omega\alpha}{k - m_T\omega^2}\right)\right).\end{cases}$$

La moyenne temporelle du carré d'une fonction sinusoïdale étant égale à $1/2$, il vient que rapport entre $i^2(t)$ et $\dot{x}^2(t)$ est donc

$$\frac{\langle i^2(t)\rangle}{\langle \dot{x}^2(t)\rangle} = \frac{1}{2}I_m^2\frac{2}{I_m^2}\frac{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + \omega^2\alpha^2}{\omega^2B^2l^2} = \frac{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + \omega^2\alpha^2}{\omega^2B^2l^2}.$$

Donc

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{\alpha}\frac{\left(k - m_T\omega^2\right)^2 + \omega^2\alpha^2}{\omega^2B^2l^2}} = \frac{1}{1 + \frac{R\alpha}{B^2l^2}\left(1 + \left(\frac{k}{\alpha}\frac{1}{\omega} - \frac{m_T}{\alpha}\omega\right)^2\right)}.$$

On identifie

$$\boxed{R_m = \frac{B^2l^2}{\alpha}}$$

et on peut alors identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0

$$\begin{cases}\frac{k}{\alpha} = Q\omega_0\\ \frac{m_T}{\alpha} = \frac{Q}{\omega_0}\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases}\frac{km_T}{\alpha^2} = Q^2\\ \frac{k}{\alpha Q} = \omega_0\end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases}Q = \frac{\sqrt{km_T}}{\alpha}\\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_T}}.\end{cases}}$$

14. Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de ω_0.

    L'efficacité η a la même forme que la fonction de transfert d'un filtre passe-bande : elle tend vers 0 pour les basses et les hautes fréquences ($\omega = 0$ et $\omega \to \infty$) ; et est maximale et égale à $1/(1+R/R_m)$ pour $\omega = \omega_0$.

FIN DU SUJET