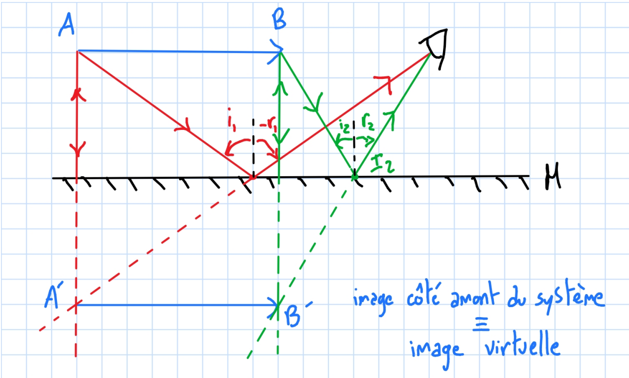
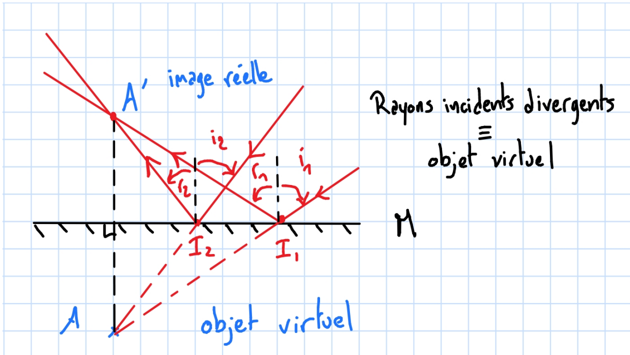
TD III. Image d'un objet

Exercice III.1. Miroir plan ★

1. **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ par un miroir plan M. **Déterminer** la nature de l'image et son grandissement transversal γ.
2. **Construire** l'image d'un objet ponctuel virtuel A par un miroir plan M. **Déterminer** la nature de l'image et son grandissement transversal γ.

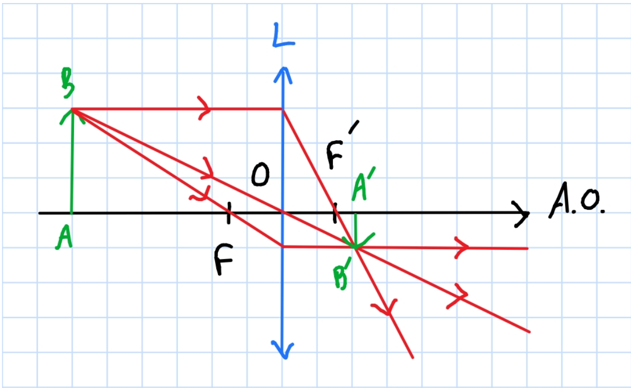


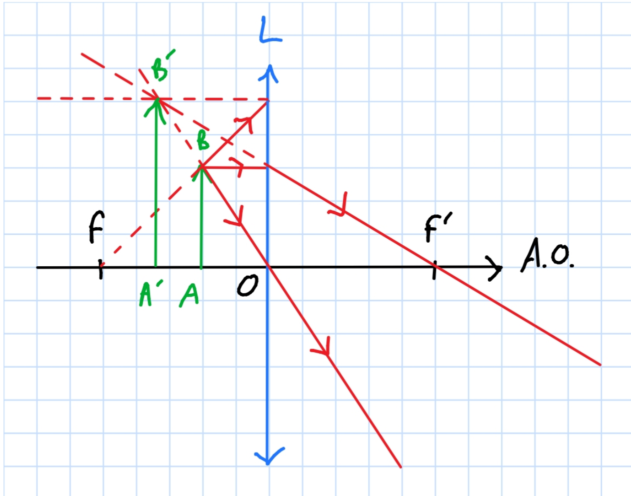


Gauche, image virtuelle avec $\gamma = 1$, et, droite, image réelle avec $\gamma = 1$.

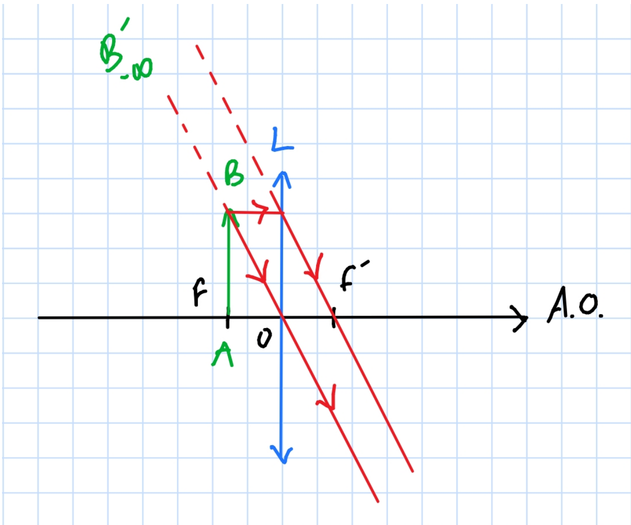
Exercice III.2. Constructions géométriques ★

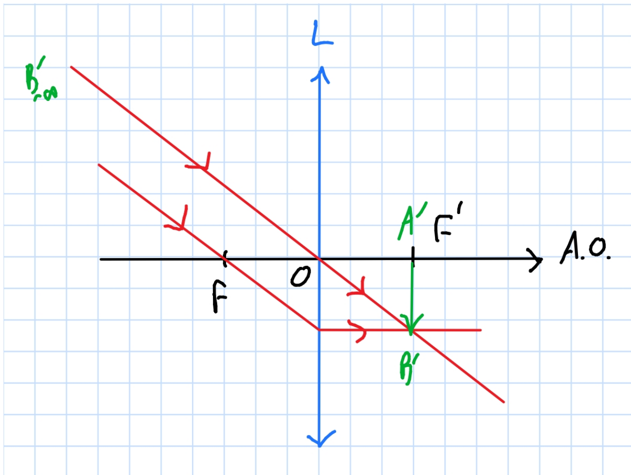
1. Lentille mince convergente
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé entre $-\infty$ et F le foyer objet principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ (virtuelle, réelle, droite, inverse, agrandie, réduite).
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé entre F et O le foyer objet principal et le centre optique de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé en F le foyer objet principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé à $-\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé entre O et F' le centre optique et le foyer image principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé entre F' le foyer image principal de L et $+\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé en F' le foyer image principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince convergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé à $+\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.



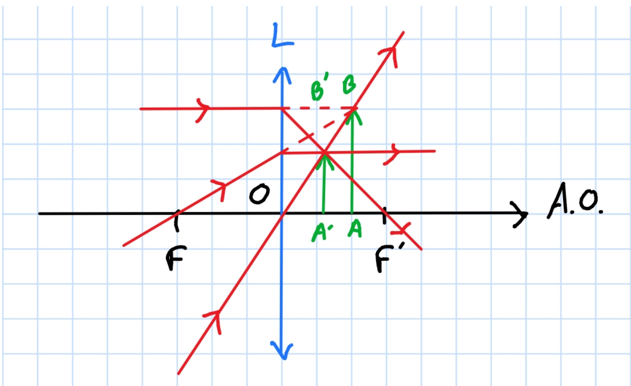


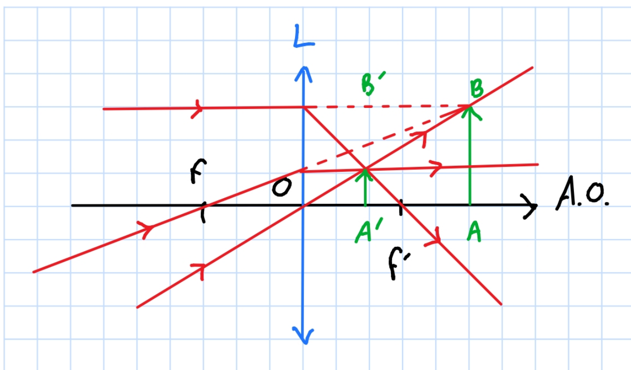
(a) Image réelle renversée réduite et (b) image virtuelle droite agrandie.



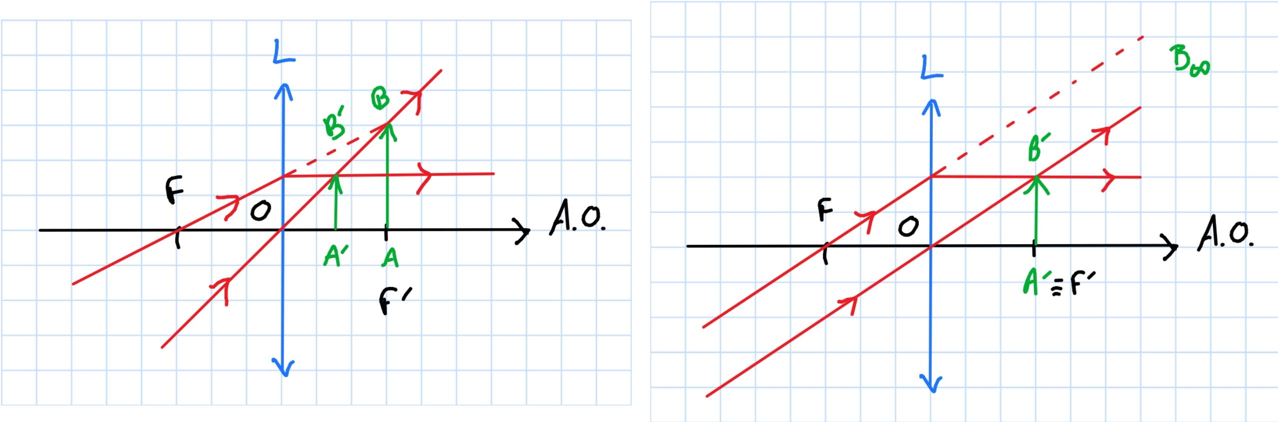


(c) Image réelle renversée agrandie ou image virtuelle droite agrandie et (d) image réelle renversée réduite.



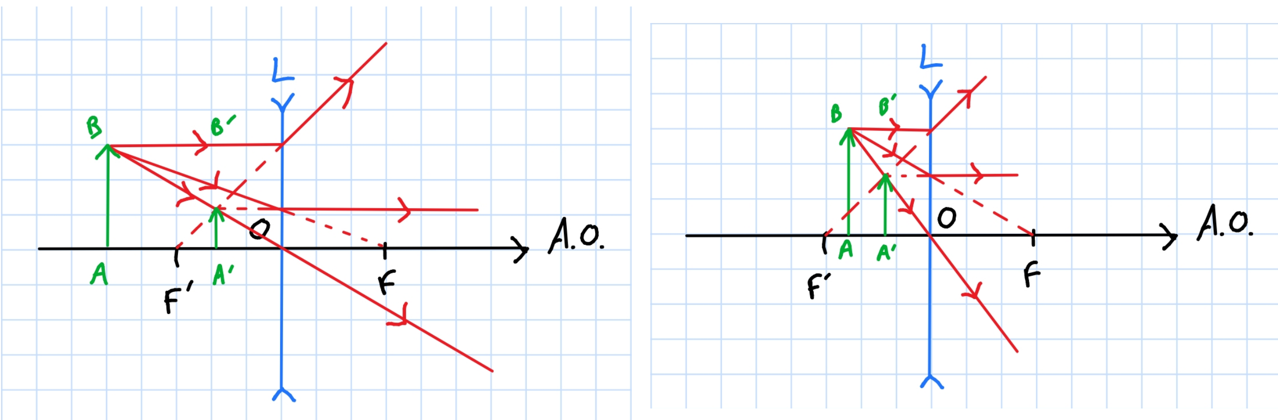


(e) Image réelle droite réduite et (f) image réelle droite réduite.

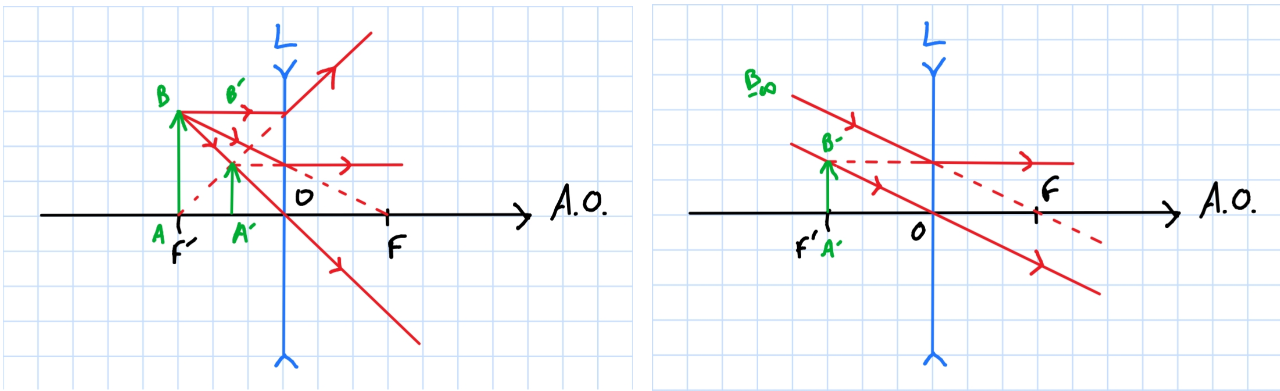


(g) Image réelle droite réduite et (h) image virtuelle droite réduite.

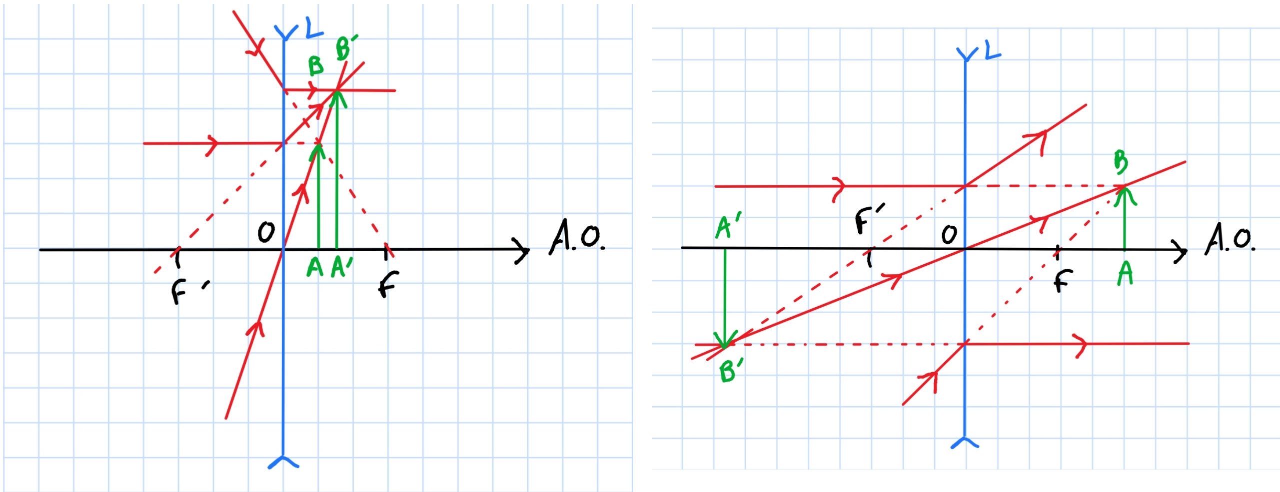
2. Lentille mince divergente
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé entre $-\infty$ et F' le foyer image principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé entre F' et O le foyer image principal et le centre optique de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé en F' le foyer image principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet réel $\overrightarrow{AB}$ situé à $-\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé entre O et F le centre optique et le foyer objet principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé entre F le foyer objet principal de L et $+\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé en F le foyer objet principal de L. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.
   - **Construire** l'image $\overrightarrow{A'B'}$ formée par une lentille mince divergente L d'un objet virtuel $\overrightarrow{AB}$ situé à $+\infty$. **Caractériser** l'image $\overrightarrow{A'B'}$.



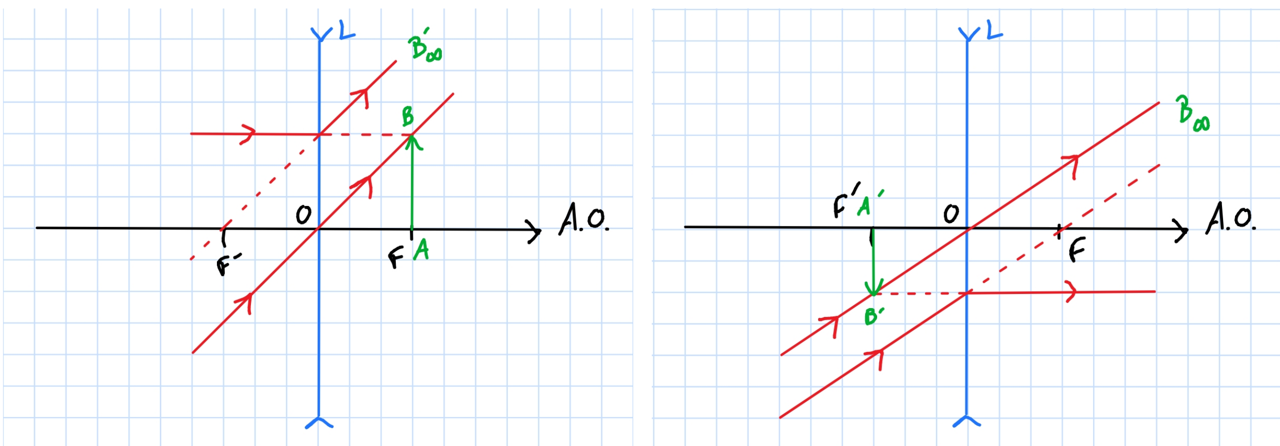
(a) Image virtuelle droite réduite et (b) image virtuelle droite réduite.



(c) Image virtuelle droite réduite et (d) image virtuelle droite réduite.



(e) Image réelle droite agrandie et (f) image virtuelle renversée agrandie.



(g) Image virtuelle renversée agrandie ou image réelle droite agrandie et (h) image virtuelle renversée réduite.

Exercice III.3. Caractéristiques d'une lentille ★ ★

Une lentille mince donne d'un objet réel situé à 60 cm en amont de son centre optique O par rapport à l'axe optique, une image droite réduite d'un facteur 5.

Déterminer par le calcul et par une construction géométrique la position de l'image et les caractéristiques de la lentille.

L'objet est réel donc il se situe en amont de la lentille. La distance algébrique entre le centre optique O et la position de l'objet A est

$$\overline{OA} = -60 \text{ cm}.$$

L'image étant droite, elle est orientée dans le même sens que l'objet. De plus, l'image est réduite d'un facteur 5, on peut donc écrire le grandissement transversal de l'image par rapport à l'objet

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}.$$

Nous connaissons une deuxième expression du grandissement transversal γ qui fait intervenir $\overline{OA}$, une donnée du problème, et $\overline{OA'}$ la distance entre le centre optique de la lentille et la position de l'image, l'inconnue que l'on recherche

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

Ainsi

$$\overline{OA'} = \gamma \overline{OA}.$$

A.R.

$$\overline{OA'} = \frac{1}{5}(-\times 60) \text{ cm} = -12 \text{ cm}.$$

L'image est située en amont de la lentille, il s'agit donc d'**une image virtuelle.**

Il nous reste à obtenir la distance focale image f' de la lentille. On utilise pour cela la relation de conjugaison de Descartes pour les positions

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

soit

$$f' = \frac{1}{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}.$$

A.R.

$$f' = \frac{1}{\frac{1}{-12 \text{ cm}} - \frac{1}{-60 \text{ cm}}}$$

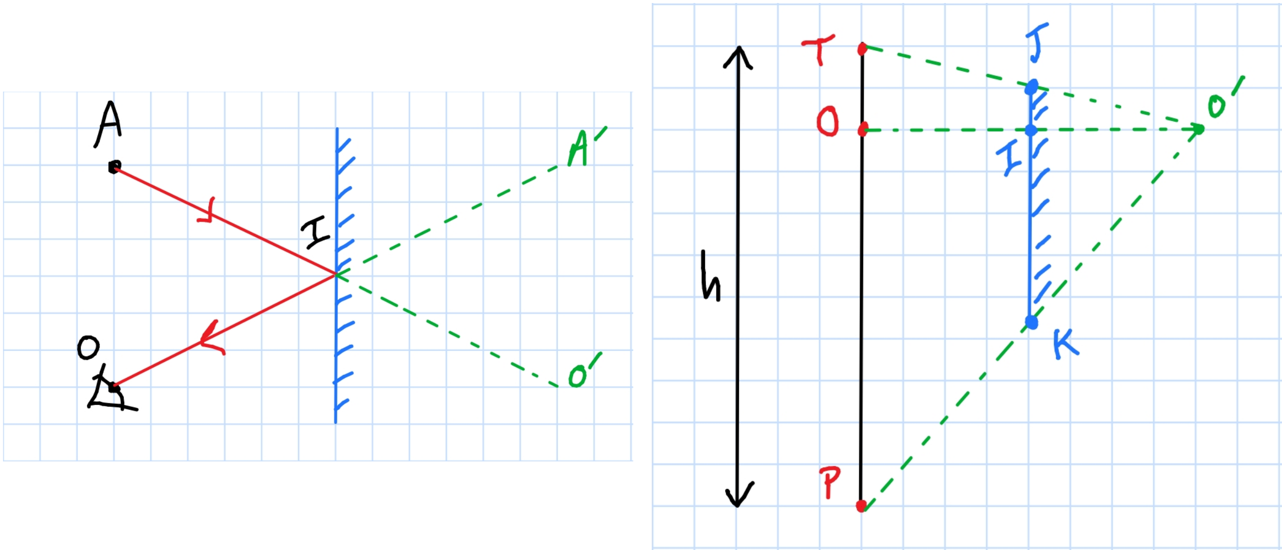
$$f' = \frac{1}{\frac{-5}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{60 \text{ cm}}} = \frac{1}{\frac{-4}{60 \text{ cm}}} = -\frac{60 \text{ cm}}{4} = -15 \text{ cm}.$$

La distance focale image f' de la lentille étant négative, nous avons affaire à **une lentille divergente**.

Exercice III.4. Champ de vision dans un miroir ★ ★ ★

1. **Montrer** que l'on voit un point A dans un miroir M si et seulement si la droite $O'A$ passe par le plan du miroir, avec O le point où se trouve l'oeil de l'observateur et O' son symétrique par rapport au plan du miroir.
   L'oeil en O voit A', l'image de A, grâce au rayon partant de A jusqu'à I, puis de I jusqu'à O. Comme le miroir est plan, nous pouvons construire un rayon symétrique partant de A' jusqu'à I, puis de I jusqu'à O', le symétrique de O, comme on le montre sur le schéma ci-dessous à gauche.

Comme l'angle de réflexion est l'opposé de l'angle d'incidence, AO' et AO sont des segments qui se coupent en I.



(a) Schéma optique d'un miroir (h) schéma de positionnement d'un miroir.

2. **Déduire** quelle est la taille minimale d'un miroir dans le lequel un homme de taille h peut se voir en entier. On assimilera le corps à un segment TP (tête-pieds) contenant la position O de l'oeil. **Déterminer** le placement du miroir.
   On réalise un schéma de la situation ci-dessus à droite. Le segment TP représente un indivu dont l'oeil est en O. D'après la question précédente, pour que l'oeil voit l'image du point T dans le miroir, il faut que le segment $O'T$ passe par un point du miroir noté J : si le miroir est trop petit et que le segment $O'T$ ne passe pas par le miroir, l'oeil ne verra pas l'image de T. J est donc le point le plus haut du miroir.
   De même, pour que l'oeil voit l'image du point P dans le miroir, il faut que le segment $O'P$ passe par un point du miroir, noté K, qui est le point le plus bas du miroir.
   Pour obtenir la distance JI on se place dans le triangle $TO'O$ et on utilise le théorème de Thalès

$$\frac{JI}{TO} = \frac{O'I}{O'O}$$

or O' est le symétrique de O, donc $O'I = O'O/2$, donc

$$\frac{JI}{TO} = \frac{1}{2}$$

$$JI = \frac{TO}{2}.$$

On fait de même avec la distance KI dans le triangle $PO'O$, soit

$$\frac{KI}{PO} = \frac{O'I}{O'O}$$

$$\frac{KI}{PO} = \frac{1}{2}$$

$$KI = \frac{PO}{2}$$

c'est à dire que l'**on doit positionner le bas du miroir K à une hauteur égale à la moitié de la hauteur des yeux de l'individu.**
Ainsi **la taille minimale du miroir** $JK = JI + IK$ est liée à la taille de l'individu $h = TP$ telle que

$$JK = \frac{TO}{2} + \frac{PO}{2}$$
$$JK = \frac{TP}{2}$$
$$JK = \frac{h}{2}.$$

Exercice III.5. La loupe ★ ★ ★

Un oeil humain sain peut voir distinctement un objet A si la distance entre cet objet et la position de l'oeil, en O_{obs}, est comprise entre l'infini et une distance minimale d_m, soit $\infty \geq \overline{AO_{obs}} \geq d_m$. On dit que l'oeil accomode si l'objet qu'il observe n'est pas à l'infini.

Un observateur regarde à l'oeil nu un tout petit objet plan que l'on assimilera à un segment AB de longueur l, perpendiculaire à l'axe optique.

1. **Déterminer** l'angle α_m, l'angle maximal sous lequel l'objet peut être vu pas l'observateur.
   L'angle maximal α_m sous lequel on peut voir un objet correspond à l'angle pour lequel l'objet est le plus proche, soit
$$\tan(\alpha_m) = \frac{l}{d_m}.$$

2. L'observateur regarde alors l'objet AB à travers une lentille mince convergente de distance focale f' et de centre O. Par rapport au centre optique, l'oeil est situé à une distance $\overline{OO_{obs}} = a$, avec $a < d_m$.
   Avant de commencer à répondre aux question (a) et (b), il faut réfléchir aux limites de position de l'image $A'B'$ formée par la lentille qui servira d'objet pour l'observateur, et en déduire les limites de position de l'objet AB qui donnera l'image $A'B'$.
   Si on réalise un schéma, on voit que la distance minimale entre l'observateur et l'image $A'B'$ est $\overline{A'O_{\text{obs}}} = d_m$, il faut donc que
$$\overline{A'O_{\text{obs}}} \geq d_m \quad \text{soit} \quad \overline{O_{\text{obs}}A'} \leq -d_m.$$
   Comme l'observateur peut voir jusqu'à l'infini, il pourra observer l'image si elle se trouve à $\overline{O_{\text{obs}}A'} \to -\infty$. Ainsi les bornes de position de l'image sont
$$-\infty \leq \overline{O_{\text{obs}}A'} \leq -d_m$$
   soit, si l'on prend pour référence la position O_{obs}
$$-\infty \leq \overline{O_{\text{obs}}O} + \overline{OA'} \leq -d_m$$
$$-\infty \leq -a + \overline{OA'} \leq -d_m$$
$$-\infty \leq \overline{OA'} \leq -d_m + a.$$
   Mais cette image en A' doit être formée par la lentille. Comme l'image se situe avant le centre optique O de la lentille ($\overline{OA'} \leq -d_m + a < 0$), il s'agit d'une image virtuelle. Pour former une image virtuelle, il faut que l'objet en A se situe entre le foyer objet principal F et le centre optique O de la lentille, soit
$$-f' \leq \overline{OA} \leq 0.$$

Mais nous avons vu que l'image se forme à une position maximale $\overline{OA'} = -d_m + a$, il faut trouver la position de l'objet $\overline{OA}$ qui correspond à cette position de l'image $\overline{OA'}$ afin d'estimer comment sont affecter les bornes de position de $\overline{OA}$. C'est ce que l'on va faire en répondant aux questions suivantes.

(a) **Déterminer** la variation de la position de l'image par rapport au centre optique de la lentille, $y = \overline{OA'}$, en fonction de la position de l'objet par rapport au centre optique de la lentille, $x = \overline{OA}$.
On veut, à partir de l'inégalité sur la position de l'image

$$-\infty \leq \overline{OA'} \leq -d_m + a$$

obtenir une inégalité sur la position de l'objet en employant la relation de conjugaison de Descartes. Mais pour savoir si le sens de l'inégalité change ou non, il faut étudier la relation entre $x = \overline{OA}$ et $y = \overline{OA'}$, soit obtenir la variation de $x = \overline{OA}$ en fonction de $y = \overline{OA'}$.
On utilise la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

donc

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{f'}}.$$

En dérivant cette y par rapport à x et en étudiant le signe de cette dérivée, on peut savoir comment évolue y lorsque x augmente. Il vient que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{f'}\right)^2}.$$

La dérivée étant toujours positive, lorsque y augmente, x augmente également (et réciproquement).

(b) **Déterminer** la position la plus lointaine et la position la plus proche par rapport au centre optique O où l'on peut placer l'objet pour qu'un oeil sain puisse voir l'image $A'B'$.
Pour déterminer les positions la plus lointaine et la plus proche de l'objet, il faut déterminer les positions la plus lointaine et la plus proche de l'image par rapport au centre optique de la lentille. On a montré qu'elles correspondaient à

$$-\infty \leq \overline{OA'} \leq -d_m + a \quad \text{ou} \quad -\infty \leq y \leq -d_m + a.$$

Comme on a montré que $y = \overline{OA'}$ croit avec $x = \overline{OA}$, on peut utiliser la relation de conjugaison de Descartes directement sur les bornes de $y = \overline{OA'}$ sans changer le sens de l'inégalité.
Soit

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

donc

$$x = \frac{1}{\frac{1}{y} - \frac{1}{f'}}.$$

Pour $y \to -\infty$, il vient que $x = \frac{1}{0 - \frac{1}{f'}} = -f'$.
Pour $y = -d_m + a$, il vient que $x = \frac{1}{\frac{1}{-d_m+a} - \frac{1}{f'}} = \frac{f'(-d_m+a)}{f'+d_m-a}$, avec $-d_m + a < 0$, donc $y < 0$. Ainsi, on peut écrire, en gardant le sens de l'inégalité sur $y = \overline{OA'}$, l'inégalité sur $x = \overline{OA}$, Soit

$$-f' \leq \overline{OA} \leq \frac{f'(-d_m + a)}{f' + d_m - a} \quad \text{ou} \quad -f' \leq x \leq \frac{f'(-d_m + a)}{f' + d_m - a}.$$

   (c) **Construire** le schéma optique pour une position de l'objet par rapport au centre optique comprise entre les positions la plus proche et la plus lointaine.
3. Lorsque l'objet est placé entre ces deux positions, la lentille est utilisée comme une loupe. **Déterminer** la position de l'objet par rapport à l'axe optique pour laquelle l'observation se fait sans accomodation. **Exprimer** l'angle α sous lequel l'oeil voit l'image sans accomoder. **Calculer** le grossissement commercial G de cette loupe, tel que $G = \alpha/\alpha_m$, sachant que $d_m = 0,25$ m et $f' = 50$ mm.

   Indice : on se placera dans les conditions de Gauss, c-à-d que l'on considérera des rayons paraxiaux, soit des rayons avec des angles faibles par rapport à l'axe optique, on pourra donc faire le développement limité d'ordre 1 en 0 des fonctions trigonométriques pour approximer ces dernières.

Exercice III.6. Miroir domestique ★ ★ ★

Les miroirs domestiques sont des lames de verre dont la face arrière, recouverte d'un dépôt d'argent, est une surface réfléchissante. Ils ne sont donc pas des miroirs plans seuls, qui eux n'ont pas de lame de verre. Ainsi, les miroirs domestiques ne sont pas, a priori, rigoureusement stigmatiques.

1. **Représenter** la trajectoire d'un rayon lumineux arrivant sur la lame de verre au point d'incidence O avec un angle d'incidence i. On note e l'épaisseur de la lame de verre et n son indice de réfraction.
2. **Montrer** que le rayon émergent du système est le même que si l'on avait uniquement une surface réfléchissante (un miroir sans lame de verre), et **exprimer** la distance d entre la position de cette surface réfléchissante seule et la position de la surface réfléchissante recouverte de la lame de verre en fonction de e, i et r l'angle de réfraction dans le verre.
3. **Montrer** que dans les conditions de Gauss d ne dépend pas de i. **Conclure**.

Exercice III.7. Lame de verre ★ ★ ★

Une lame transparente est caractérisée par son épaisseur e et l'indice n du milieu qui la compose. On cherche à caractériser cet ensemble de deux dioptres dans le cadre de l'optique géométrique.

1. **Donner** un ordre grandeur de l'indice du verre.
2. À partir des schémas optiques présentés Figure 1.18 **déterminer** graphiquement la position de l'image ponctuelle A' de l'objet ponctuel A formée par la lame dans le cas d'un objet réel et d'un objet virtuel.
3. **Montrer**, par des considérations géométriques, que la relation de conjugaison qui relie A et A' est donnée, dans les conditions de Gauss, par

$$\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

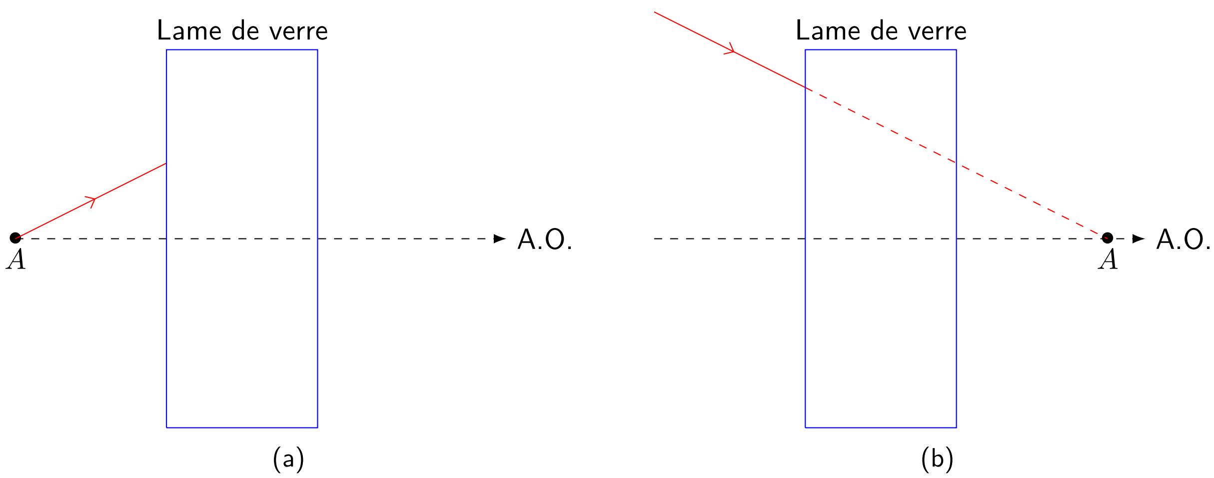


Figure 1.18 – Schéma optiques d'objets ponctuels (a) réel et (b) virtuel.