# TD IV. Modèles de quelques dispositifs optiques

### Exercice IV.1. Étude d'une lunette astronomique ★

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes de même axe optique noté $\Delta$ : un objectif noté $L_1$, de centre optique $O_1$ et de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$ ; et un oculaire noté $L_2$, de centre optique $O_2$ et de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$.

On souhaite observer la planète Mars qui est vue à l'oeil nu sous un diamètre apparent $\alpha$.

1. Pour observer la planète avec la lunette, on forme un système afocal.
   (a) **Expliquer** l'adjectif afocal. **En déduire** la position relative des deux lentilles.
   (b) **Réaliser** le schéma de la lunette pour $f'_1 = 5f'_2$. **Dessiner** sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux non parallèle à l'axe optique formé à partir d'un rayon issu de l'astre. On note l'image intermédiaire $\overrightarrow{A'B'}$.
   (c) On souhaite réaliser une photographie de l'image formée par la lunette. **Déterminer** où placer le capteur CCD.

2. On note $\alpha'$ l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.
   (a) **Déterminer** si l'image est droite ou renversée.
   (b) **Exprimer** le grossissement $G$ de la lunette en fonction des distances focales images de l'objectif et de l'oculaire.

3. On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre $L_1$ et $L_2$ une lentille convergente $L_3$ de distance focale image $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$.
   L'oculaire $L_2$ est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.
   (a) **Déterminer** les couples de points que doit conjuguer $L_3$ pour avoir une image nette à l'infini.
   (b) **Faire** un schéma (on placera $O_3$ entre $F_1$ et $F_2$ et on appellera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la seconde image intermédiaire).
   (c) On appelle $\gamma_3$ le grandissement de la lentille $L_3$. **En déduire** $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de $f'_3$ et $\gamma_3$.
   (d) En déduire le nouveau grossissement $G'$ en fonction de $G$ et $\gamma_3$. Comparer $G'$ à $G$ en signe et valeur absolue.

### Exercice IV.2. Défauts de l'oeil ★★

Dans un premier temps, nous allons caractériser deux défauts connus de l'oeil.

1. On étudie un oeil emmétrope, un oeil dont la distance cristallin-rétine $d_{m,e}$ correspond à la distance focale maximale de l'oeil $f'_{max}$. **Donner** la valeur de sa vergence minimale $V_{min,e}$ en fonction de $d_{m,e}$.
   La vergence minimale correspond à la distance focale maximale, soit lorsque l'oeil est au repos. Au repos l'oeil observe un objet à l'infini, d'après la relation de conjugaison des positions de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{d_{m,e}} - 0 = \frac{1}{f'_{max}}$$

$$\boxed{V_{min,e} = \frac{1}{f'_{max}} = \frac{1}{d_{m,e}}.}$$

2. On étudie maintenant un oeil amétrope dont la distance cristallin-rétine $d_{m,a}$ est différente de la distance $d_{m,e}$ mais dont les distances focales maximales et minimales sont les mêmes que celles de l'oeil emmétrope. **Exprimer** la distance du *punctum remotum* de l'oeil amétrope $\overline{OA}_{P.R.,a}$ en fonction de $d_{m,a}$ et $d_{m,e}$.

On utilise de nouveau la relation de conjugaison de Descartes dans le cas de l'oeil amétrope observant un objet au *punctum remotum*. Dans ce cas l'oeil atteint sa distance focale maximale $f'_{max}$, ainsi

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.R.,a}} = \frac{1}{f'_{max}}$$

$$\boxed{\overline{OA}_{P.R.,a} = \frac{1}{\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{f'_{max}}}.}$$

3. **Déterminer** où se trouve le P.R. dans le cas d'un oeil amétrope trop long. **Déterminer** le défaut de l'oeil trop long.
Si l'oeil est trop long alors $d_{m,a} > d_{m,e}$, or $d_{m,e} = f'_{max}$, donc $d_{m,a} > f'_{max}$. Ainsi

$$\frac{1}{d_{m,a}} < \frac{1}{f'_{max}} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{f'_{max}} < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{f'_{max}}} > 0$$

$$\boxed{\overline{OA}_{P.R.,a} > 0.}$$

La distance algébrique centre optique - objet est positive et finie, le *punctum remotum* est en aval du système optique, **il s'agit d'un point virtuel.**

4. **Déterminer** où se trouve le P.R. dans le cas d'un oeil amétrope trop court.
Dans le cas d'un oeil trop court $d_{m,a} < d_{m,e}$, or $d_{m,e} = f'_{max}$, donc $d_{m,a} < f'_{max}$. Ainsi

$$\frac{1}{d_{m,a}} > \frac{1}{f'_{max}} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{f'_{max}} > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{f'_{max}}} < 0$$

$$\boxed{\overline{OA}_{P.R.,a} < 0.}$$

La distance algébrique centre optique - objet est négative et finie, le *punctum remotum* est en amont du système optique, **il s'agit d'un point réel.**

5. **Exprimer** la différence entre la distance du *punctum proximum* de l'oeil amétrope $\overline{OA}_{P.P.,a}$ et celle du *punctum proximum* de l'oeil emmétrope $\overline{OA}_{P.P.,e}$ en fonction de $\overline{OA}_{P.P.,a}$, $\overline{OA}_{P.P.,e}$, $d_{m,e}$ et $d_{m,a}$.
Dans le cas d'un oeil amétrope le *punctum proximum* est telle que

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,a}} = \frac{1}{f'_{min}}.$$

Il reste à exprimer la distance focale de l'oeil amétrope qui égale à celle de l'oeil emmétrope. On utilise donc la relation de Descartes dans le cas d'un oeil emmétrope obserbant un objet au *punctum proximum*

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,e}} = \frac{1}{f'_{min}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,a}} = \frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,e}} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,e}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.P.,a}} = \frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}}$$

$$\frac{\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e}}{\overline{OA}_{P.P.,e}\overline{OA}_{P.P.,a}} = \frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}} \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e} = \overline{OA}_{P.P.,e}\overline{OA}_{P.P.,a}\left(\frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}}\right).}$$

6. **Déterminer** la position du P.P. de l'oeil amétrope en fonction de celui de l'oeil emmétrope pour un oeil trop court.
À partir de l'expression précédente on peut étudier le signe de $\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e}$.
On commence par le terme $\frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}}$. Pour un oeil trop court $d_{m,e} > d_{m,a}$, donc $\frac{1}{d_{m,e}} < \frac{1}{d_{m,a}}$, donc $\frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}} < 0$.
On étudie ensuite le signe de $\overline{OA}_{P.P.,e}$. On sait qu'un objet au *punctum proximum* d'un oeil emmétrope est en aval du système optique donc $\overline{OA}_{P.P.,e} < 0$.
Finalement comme la distance $\overline{OA}_{P.P.,a}$ est toujours négative, $\overline{OA}_{P.P.,a} < 0$, alors $\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e} < 0$, donc $\overline{OA}_{P.P.,a} < \overline{OA}_{P.P.,e}$. **Le *punctum proximum* dans le cas d'un oeil plus court est en aval de l'oeil mais à une distance plus grande que dans le cas d'un oeil emmétrope.**
7. **Déterminer** la position du P.P. de l'oeil amétrope en fonction de celui de l'oeil emmétrope pour un oeil trop court. **Déterminer** le défaut de l'oeil trop long.
À partir de l'expression précédente on peut étudier le signe de $\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e}$.
On commence par le terme $\frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}}$. Pour un oeil trop long $d_{m,e} < d_{m,a}$, donc $\frac{1}{d_{m,e}} > \frac{1}{d_{m,a}}$, donc $\frac{1}{d_{m,e}} - \frac{1}{d_{m,a}} > 0$.
On étudie ensuite le signe de $\overline{OA}_{P.P.,e}$. On sait qu'un objet au *punctum proximum* d'un oeil emmétrope est en aval du système optique donc $\overline{OA}_{P.P.,e} < 0$.
Finalement comme la distance $\overline{OA}_{P.P.,a}$ est toujours négative, $\overline{OA}_{P.P.,a} < 0$, alors $\overline{OA}_{P.P.,a} - \overline{OA}_{P.P.,e} > 0$, donc $\overline{OA}_{P.P.,a} > \overline{OA}_{P.P.,e}$. **Le *punctum proximum* dans le cas d'un oeil plus long est en aval de l'oeil mais à une distance plus petite que dans le cas d'un oeil emmétrope.**
Comme l'oeil trop long peut voir plus près que l'oeil emmétrope, **l'oeil trop long est myope**.

Étudions maintenant comment les corriger.

8. On considère une première lentille $L_1$ de distance focale image $f'_1$ et de centre optique $O$, qui forme d'un objet $\overline{AB}$ une image $\overline{A'B'}$. **Exprimer** la position de l'image $\overline{OA'}$ en fonction de $f'_1$ et de la position de l'objet $\overline{OA}$.
D'après la relation de conjugaison des positions de Descartes
$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1}.}$$
9. On accole une deuxième lentille $L_2$ à la première de sorte que leur centre optique soient confondus. Cette lentille forme une nouvelle image $\overline{A'B'}$ à partir de l'objet $\overline{A'B'}$. **Exprimer** la position de l'image $\overline{OA''}$ en fonction de $f'_2$ et de la position du nouvel l'objet $\overline{OA}$.
D'après la relation de conjugaison des positions de Descartes
$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_2} \iff \boxed{\overline{OA''} = \frac{1}{\frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{OA'}}}.}$$
10. **Exprimer** la position de l'image $\overline{OA''}$ en fonction de $f'_1$, $f'_2$ et de la position de l'objet initial $\overline{OA'}$. **En conclure** une règle d'association des lentilles lorsque celles-ci sont accolées.
D'après la réponse précédente
$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{OA}}$$
donc
$$\frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{OA'}} \iff \frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{OA}}.$$

On constate qu'en accolant deux lentilles on obtient la relation de conjugaison suivantes

$$\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1} = V_2 + V_1$$

avec $V_1$ et $V_2$ les vergences des deux lentilles. Ainsi deux lentilles accolées sont analogues à une lentille de vergence somme des vergences des premières lentilles $V_3 = V_1 + V_2$. On peut généraliser pour $N$ lentilles réalisant l'image $A'B'$ de l'objet $AB$.

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{f'_i}}$$

Dans les cas deux lentilles précédentes, on peut exprimer la position $\overline{OA''}$

$$\boxed{\overline{OA''} = \frac{1}{\frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{OA}}}.}$$

11. À partir des réponses de la première partie et de la réponse précédente, **Déterminer** la correction de vergence $\Delta V$ à ajouter à la vergence minimale $V_{min}$ de l'oeil amétrope pour que son P.R. soit à $-\infty$. **Déterminer** le signe de cette correction pour un oeil trop long et pour un oeil trop court, ainsi que la nature des lentilles minces permettant de les corriger.
Dans le cas d'un oeil amétrope, on a montré que la position du *punctum remotum* respectait la relation de conjugaison suivantes

$$\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{\overline{OA}_{P.R.,a}} = V_{min} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{\overline{OA}_{P.R.,a}} = -\frac{1}{d_{m,a}} + V_{min}.$$

Afin d'amener le P.R. à $-\infty$, soit à $\overline{OA}_{P.R.,e}$, on accole une lentille de vergence $\Delta V$ à l'oeil amétrope. Il vient donc que

$$-\frac{1}{\overline{OA}_{P.R.,e}} = -\frac{1}{d_{m,a}} + V_{min} + \Delta V \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = -\frac{1}{d_{m,a}} + V_{min} + \Delta V$$

$$\Delta V = \frac{1}{d_{m,a}} - V_{min} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\Delta V = \frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{d_{m,e}}.}$$

Dans le cas d'un oeil trop long ou myope $\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{d_{m,e}} < 0$, donc $\Delta V < 0$, donc la distance focale image de la lentille qu'on accole est négative : une lentille divergente permet de faire diverger les rayons afin qu'ils se croisent un peu plus loin au niveau de la rétine de l'oeil plus long.
Dans le cas d'un oeil trop court ou hypermétrope $\frac{1}{d_{m,a}} - \frac{1}{d_{m,e}} > 0$, donc $\Delta V > 0$, donc la distance focale image de la lentille qu'on accole est positive : une lentille convergente permet de rabattre les rayons afin qu'ils se croisent un peu plus près au niveau de la rétine de l'oeil plus court.

12. Les corrections moyennes sont pour les deux défauts de $-3\,\delta$ et $3\,\delta$. **Déterminer** les distances $d_{m,a}$ correspondant.
D'après la réponse précédente, la taille d'un oeil amétrope est

$$\boxed{d_{m,a} = \frac{1}{\Delta V + \frac{1}{d_{m,e}}}.}$$

Pour la myopie, la vergence de la lentille divergente correctrice est $\Delta V = -3\,\delta$, la taille de l'oeil amétrope trop long est donc

$$\boxed{d_{m,a} = \frac{1}{-3\,\delta + \frac{1}{SI17e{-}3m}} = 18\,\text{mm}.}$$

Pour l'hypermétropie, la vergence de la lentille convergente correctrice est $\Delta V = 3\,\delta$, la taille de l'oeil amétrope trop court est donc

$$\boxed{d_{m,a} = \frac{1}{3\,\delta + \frac{1}{SI17e{-}3m}} = 16\,\text{mm}.}$$

### Exercice IV.3. Le microscope classique ★★★

*Adapté du concours CCINP - MPI*

Le microscope est modélisé sur la Figure 1.19, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille $L_1$ de centre $O_1$ et de distance focale image $f' = 5\,\text{mm}$), et l'autre constituant l'oculaire (lentille $L_2$ de centre $O_2$ et de distance focale image $f'_1 = 15\,\text{mm}$).

On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120\,\text{mm}$. On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.

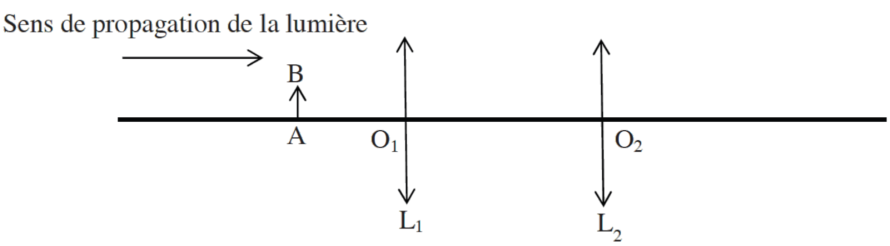


**Figure 1.19**

1. Si $F'_1$ est le foyer image de $L_1$ et $F_2$ le foyer objet de $L_2$, on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$. Exprimer $\Delta$ en fonction de $f'_1$, $f'_2$, $D_0$, puis calculer sa valeur.

   Un objet réel $AB$ perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance $d$ de $L_1$, à sa gauche, de façon à ce que l'image $A'B'$ donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

2. Exprimer $d$ en fonction de $f'_1$ et $\Delta$, puis calculer sa valeur.
3. Exprimer le grandissement $\gamma_1$ induit par l'objectif en fonction de $f'_1$ et $\Delta$, puis calculer sa valeur.
4. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?
5. Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle $\alpha'$ sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope.
6. Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|$ où $\alpha$ est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance $D = 250\,\text{mm}$. L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles. Exprimer G en fonction de $\Delta$, $D$, $f'_1$ et $f'_2$, puis calculer sa valeur.