

DS 1 : formation des images

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 4 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques : $\cos \alpha \approx 1$; $\sin \alpha \approx \alpha$; $\tan \alpha \approx \alpha$.

1 Fibre optique - Approche géométrique

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2011)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la Figure 1 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox) , de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .

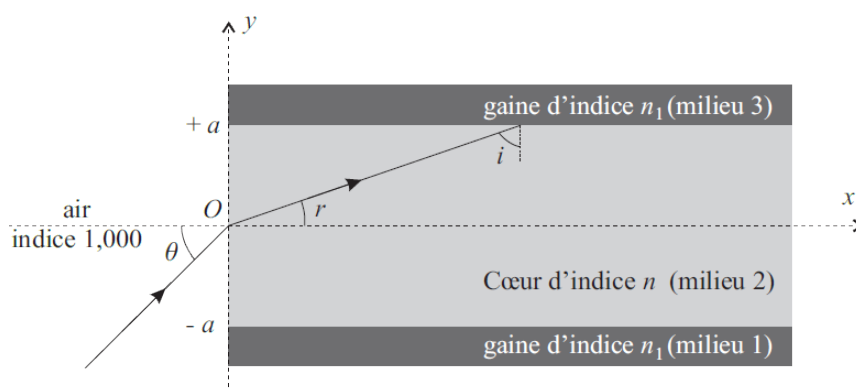


Figure 1: Fibre optique en coupe.

1. Les différents angles utiles sont représentés sur la Figure 1. À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_l l'angle d'incidence limite.

Le rayon reste confiné à l'intérieur du cœur si **la réflexion à l'interface cœur-gaine est totale**. C'est le cas lorsque l'angle d'incidence i est supérieur à l'angle d'incidence limite i_l correspondant à un rayon émergent rasant, soit un rayon émergent avec un angle de réfraction $i_2 = \pi/2$, soit d'après la loi de la réfraction

$$n \sin i_l = n_1 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$n \sin i_l = n_1.$$

La condition de confinement est donc

$$i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right).$$

2. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_l . En déduire l'expression de l'ouverture numérique $O.N. = \sin \theta_l$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.

θ étant l'angle d'incidence sur le dioptre air-cœur en entrée de fibre, l'angle de réfraction des rayons est donné par la loi de la réfraction

$$\sin \theta = n \sin r$$

or $r + i + \frac{\pi}{2} = \pi$, soit $r = \frac{\pi}{2} - i$, donc

$$\sin \theta = n \cos i.$$

Or $i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$, si on applique la fonction $\cos$ sur cette inégalité, comme cette fonction est décroissante entre 0 et $\pi/2$ l'inégalité change de signe

$$\cos i < \cos \left[\arcsin \left(\frac{n_1}{n} \right) \right].$$

On peut exprimer le cosinus en fonction du sinus : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, soit

$$\cos i < \sqrt{1 - \sin^2 \left[\arcsin \left(\frac{n_1}{n} \right) \right]}$$

$$\cos i < \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n} \right)^2}$$

$$n \cos i < n \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n} \right)^2}$$

$$\sin \theta < \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

$$\theta < \arcsin \left(\sqrt{n^2 - n_1^2} \right).$$

L'angle d'incidence θ doit être inférieur à l'angle θ_l tel que

$$\sin \theta_l = n \cos i_l = \sqrt{n^2 - n_1^2}.$$

L'expression de l'ouverture numérique de la fibre $O.N.$ est donc

$$O.N. = \sin \theta_l$$

$$O.N. = \sqrt{n^2 - n_1^2}.$$

3. Donner la valeur numérique de $ON.$ pour $n = 1,50$ et $n_1 = 1,47$.

A.N.

$$ON. = \sqrt{1,50^2 - 1,47^2}$$

$$ON. = 0,298.$$

On considère une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_l . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

4. Pour quelles valeurs de l'angle θ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal et maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n et n_1 .

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est minimal lorsque le rayon lumineux est parallèle à l'axe optique. Le temps de parcours t_{min} est donc

$$t_{min} = \frac{L}{c_n} = n \frac{L}{c}$$

avec L la longueur de la fibre et c_n la célérité du rayon dans le cœur de la fibre d'indice n .

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est maximal lorsque le rayon lumineux entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ_l . Ce rayon arrive sur l'interface cœur-gaine avec un angle i_{lim} . Lorsque ce rayon parcourt une distance d_{max} , le rayon du parcours minimal parcourt une distance d_{min} . Ces deux distances sont liées à l'angle i_{lim} telles que

$$\sin i_{lim} = \frac{d_{min}}{d_{max}}$$

soit

$$\frac{n_1}{n} = \frac{d_{min}}{d_{max}}.$$

Le parcours maximal sera donc toujours lié au parcours minimal par la relation

$$d_{max} = \frac{n}{n_1} d_{min}.$$

On peut donc obtenir le temps de parcours maximal t_{max}

$$t_{max} = \frac{n}{n_1} \frac{d_{min}}{c_n}$$

$$t_{max} = \frac{n^2 L}{n_1 c}.$$

L'intervalle de temps δt est donc

$$\delta t = t_{max} - t_{min}$$

$$\delta t = \frac{n^2 L}{n_1 c} - n \frac{L}{c}$$

$$\delta t = n \frac{L}{c} \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right).$$

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_l . La Figure 2 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

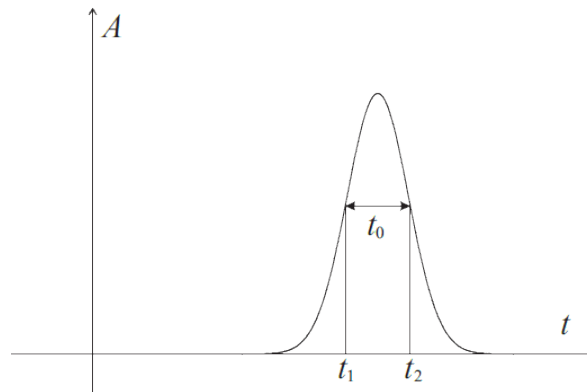


Figure 2: Impulsion lumineuse.

5. Reproduire la Figure 2 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

La durée caractéristique de l'impulsion lumineuse t'_0 en sortie est

$$t'_0 = t_0 + \delta t.$$

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F .

6. En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour que les impulsions ne se recouvrent pas à la sortie de la fibre optique, il faut que la durée des impulsions en sortie de la fibre soit être plus courte que le délai entre deux impulsions successives. Ce délai correspond à la période T d'émission des impulsions telle que $T = 1/F$.

Il faut donc que

$$t'_0 < T$$

$$t_0 + \delta t < T$$

soit, pour une durée d'impulsion d'entrée t_0 négligeable devant δt

$$\delta t < T$$

soit

$$n \frac{L}{c} \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) < \frac{1}{F}$$

ou

$$F < \frac{c}{nL} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

$$Fn \frac{L}{c} \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) < 1.$$

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{max} \cdot F$.

7. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n et n_1 .

La longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions correspond à la condition limite pour laquelle il n'y a pas recouvrement soit

$$Fn \frac{L_{max}}{c} \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) = 1$$

soit

$$F = \frac{c}{nL_{max}} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

La bande passante B est alors

$$B = L_{max} \cdot F$$

$$B = L_{max} \frac{c}{nL_{max}} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}$$

$$B = \frac{c}{n} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

8. Calculer la valeur numérique de la bande passante B (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 3. Pour un débit d'information de $F = 100 \text{ Mbits.s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de L_{max} obtenue.

A.N.

$$B = \frac{3.10^8 \text{ m.s}^{-1}}{1,50} \frac{1}{\frac{1,50}{1,47} - 1}$$

$$B = 9,80.10^9 \text{ m.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6 \text{ km.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6 \text{ Hz.km}$$

$$B = 9,80 \text{ MHz.km.}$$

Avec cette bande passante B et ce débit d'information F , on peut exprimer la longueur maximale de fibre optique L_{max} à partir de la relation

$$B = L_{max} \cdot F$$

soit

$$L_{max} = \frac{B}{F}.$$

A.N.

$$L_{max} = \frac{9,80 \text{ MHz.km}}{100 \text{ MHz}}$$

$$L_{max} = 9,80.10^{-2} \text{ km}$$

$$L_{max} = 98,0 \text{ m.}$$

D'après la valeur obtenue pour la longueur maximale de la fibre optique étudiée, on peut utiliser cette dernière pour des transferts de données informatiques dans un bâtiment, mais pas pour des grandes distances.

2 Étude d'une lunette astronomique

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes de même axe optique noté Δ : un objectif noté L_1 , de centre optique O_1 et de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$; et un oculaire noté L_2 , de centre optique O_2 et de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$.

On souhaite observer la planète Mars qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent α .

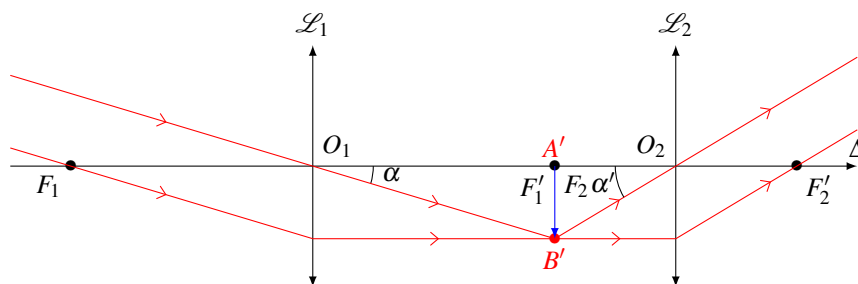
Pour observer la planète avec la lunette, on forme un système afocal.

9. Expliquer l'adjectif afocal. En déduire la position relative des deux lentilles.

Un système afocal est un système qui ne possède pas de foyer : des rayons qui arrivent de manière incidente sur ce système, ressortent parallèles également.

Pour que la lunette soit considérée comme afocal il faut donc que l'image $A''B''$ produite par l'oculaire soit à l'infini, donc que l'objet qu'elle exploite soit sur son foyer objet principal F_2 . Cette objet est l'image $A'B'$ produite par l'objectif. Or cette image est produite à partir d'un objet AB à l'infini, elle est donc située sur le foyer image principal de l'objectif F'_1 . Donc F'_1 et F_2 sont confondus pour que la lunette soit considérée comme afocal.

10. Réaliser le schéma de la lunette pour $f'_1 = 5f'_2$. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux non parallèle à l'axe optique formé à partir d'un rayon issu de l'astre. On note l'image intermédiaire $\overline{A'B'}$.



11. On souhaite réaliser une photographie de l'image formée par la lunette. **Déterminer** où placer le capteur CCD.

Le capteur CCD est pareil à un écran, pour qu'il puisse enregistrer une image il doit capturer une image à une distance finie. Ainsi, on doit placer le capteur au niveau de F'_1 et F_2 .¹

On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.

12. Déterminer si l'image est droite ou renversée.

Comme on peut le voir sur le schéma, l'image est renversée car les rayons de la dernière image viennent du bas, alors que les rayons issus du premier l'objet viennent du haut.

13. Exprimer le grossissement G de la lunette en fonction des distances focales images de l'objectif et de l'oculaire.

Le grossissement G est défini tel que $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Or d'après le schéma, on voit que

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'_1} \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{f'_2} \text{ car } \alpha \ll 1 \text{ et } \alpha' \ll 1.$$

Donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\overline{A'B'}}{f'_2} \frac{f'_1}{\overline{A'B'}} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

soit

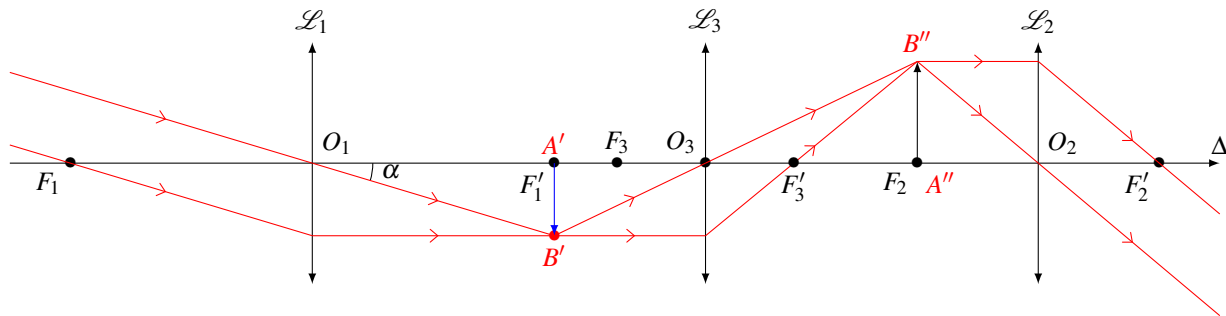
$$G \approx -\frac{f'_1}{f'_2}.$$

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale image $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

14. Déterminer les couples de points que doit conjuguer L_3 pour avoir une image nette à l'infini.

Les couples de points que doit conjuguer L_3 sont F'_1 et F_2 .

15. Faire un schéma (on placera O_3 entre F_1 et F_2 et on appellera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la seconde image intermédiaire).



16. On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3 . En déduire $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de f'_3 et γ_3 .

D'après la relation de conjugaison de grandissement de Descartes

$$\gamma_3 = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F'_1}}$$

et d'après la relation de conjugaison de position de Descartes

$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$$

ainsi

$$\frac{1}{\gamma_3 \overline{O_3F'_1}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$$

soit

$$\overline{O_3F'_1} = f'_3 \left(\frac{1}{\gamma_3} - 1 \right).$$

17. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de G et γ_3 . Comparer G' à G en signe et valeur absolue.

Le nouveau grossissement G' est tel que $G' = \frac{\alpha''}{\alpha}$ avec

$$\tan \alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{f_2} \quad \text{or} \quad \gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \quad \text{donc} \quad \alpha'' \approx \tan \alpha'' = \gamma_3 \frac{\overline{A'B'}}{f_2}.$$

Comme $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'_1}$ il vient que

$$G' = \frac{\alpha''}{\alpha} \approx \gamma_3 \frac{\overline{A'B'}}{f_2} \frac{f'_1}{\overline{A'B'}} = \gamma_3 \frac{f'_1}{f_2} = -\gamma_3 \frac{f'_1}{f'_2}$$

donc

$$G' = -\gamma_3 G.$$

G' est de signe opposé à G , l'image observée est droite. En valeur absolue le rapport entre les deux grossissements est donnée par le grandissement de L_3 : $\gamma_3 = \left| \frac{G'}{G} \right|$.

3 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la Figure 3.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (Figure 3) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

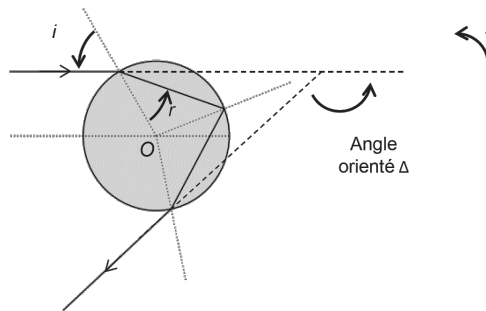


Figure 3: Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

18. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

La loi de Snell-Descartes de la réfraction est telle que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

On l'appliquant ici, il vient que

$$n_{\text{air}} \sin i = n \sin r$$

soit

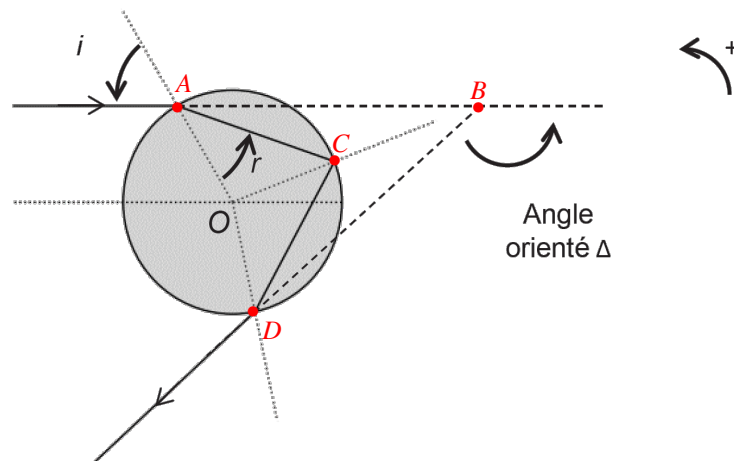
$$\sin i = n \sin r.$$

19. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (Figure 3).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin i$.

D'après le schéma ci-dessous, on considère comme sens de parcours des angles le sens trigonométrique ou direct. On étudie le rayon incident juste avant sa réfraction dans la goutte. Il a un angle de 0rad avec l'horizontale. Après la réfraction il passe sous l'horizontale, il a donc subi une déviation selon un angle $\Delta_1 = \widehat{BAC}$. L'angle $\widehat{BAO}$ entre la droite tiretée et la normale au premier point d'incidence correspond à l'angle i . On en déduit que l'angle de la première déviation est $\widehat{BAC} = i - r$.



Le rayon subit ensuite une réflexion. On peut considérer que l'angle de déviation Δ_2 est l'angle entre la droite passant par le segment AC et le segment CD . On constate que cet angle est tel que $\pi = \Delta_2 + \widehat{DCA}$. Comme ACD est un triangle isocèle, $\widehat{DCA} = \widehat{DCO} + \widehat{OCD} = 2\widehat{OCD}$. Comme ACO est également un triangle isocèle car $AC = CO = R$ avec R le rayon de la goutte, l'angle $\widehat{OCD} = r$. Ainsi $\Delta_2 = \pi - \widehat{DCA} = \pi - 2r$.

Le rayon subit une dernière déviation selon Δ_3 l'angle entre la droite passant par le segment CD et le rayon émergent de la goutte. On constate que cet angle est l'angle symétrique à l'angle $\widehat{CDB}$. Il est lui même le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi l'angle de la troisième déviation est $\Delta_3 = \widehat{CDB} = \widehat{BAC} = i - r$.

Ainsi la déviation totale dans le sens trigonométrique est $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, soit

$$\Delta = i - r + \pi - 2r + i - r = \pi - 4r + 2i.$$

On exprime maintenant Δ en fonction de n et $x = \sin i$. On voit d'abord que $i = \arcsin x$. Ensuite grâce à la loi de la réfraction, on sait que $\sin i = n \sin r$, soit $x = n \sin r$, donc $\sin r = \frac{x}{n}$, soit $\arcsin(\sin r) = r = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$. Ainsi

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin x$$

20. Montrer $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin i_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Données : $\frac{d}{du}(\arcsin(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$

Afin de déterminer l'extremum de la fonction $\Delta(x)$, il faut déterminer la valeur de $x = x_m$ pour laquelle sa dérivée par rapport à x s'annule, soit $\frac{d\Delta(x)}{dx} = 0$.

En utilisant les données de l'énoncé, il vient que

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette expression s'annule pour $x = x_m$, soit

$$0 = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^2}} ; \quad 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^2}} = \frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} ; \quad \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{1 - x_m^2}{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} ;$$

$$\frac{n^2}{4} = \frac{1 - x_m^2}{1 - \frac{x_m^2}{n^2}} ; \quad n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 ; \quad 3x_m^2 = 4 - n^2 \quad \text{donc} \quad x_m = \pm \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} .$$

Comme $x_m = \sin i_m$ et que l'on s'intéresse aux valeurs positives de i_m , on retiendra seulement la valeur positive de x_m .

21. Justifier à l'aide de la Figure 4 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

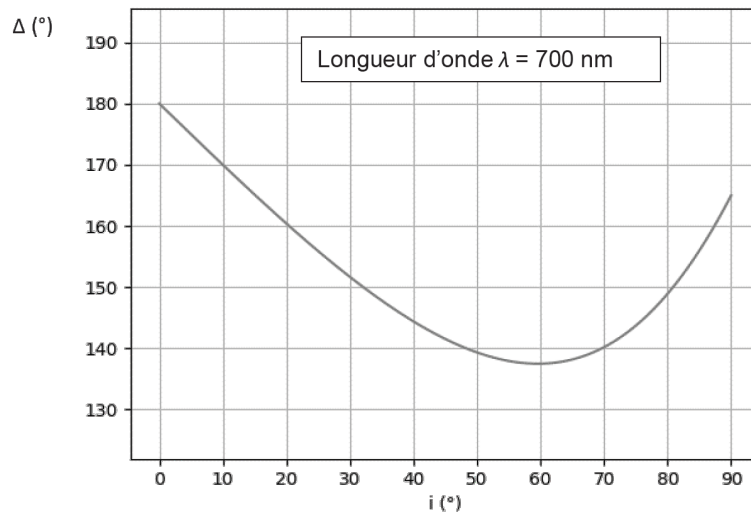
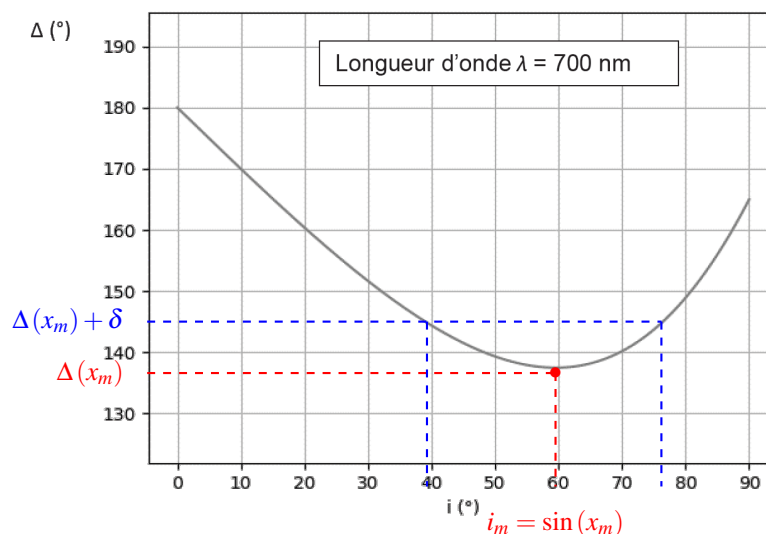


Figure 4: Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

Sur la figure ci-dessous, on constate qu'autour de la valeur i_m , l'angle d'incidence peut prendre de nombreuses valeurs (par exemple entre 40° et 80°) pour lesquelles la déviation $\Delta(x_m) + \delta$ sera proche de $\Delta(x_m)$. Ce qui signifie que de nombreux rayons incidents d'angle d'incidence de valeurs plus ou moins différentes de i_m vont émerger dans une direction similaire, **il y a donc accumulations de nombreux rayons lumineux de différentes incidences dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.**



22. Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400\text{nm}$, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700\text{nm}$, $n = 1,330$).

Dans le cas du violet

A.N.

$$x_{m,v} = \sqrt{\frac{4 - n_v^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 - 1,343^2}{3}} = 0,856.$$

$$\Delta(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,v}}{n_v}\right) + 2 \arcsin(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,856}{1,343}\right) + 2 \arcsin(0,856) = 2,432\text{rad} = 139,4^\circ.$$

Dans le cas du rouge

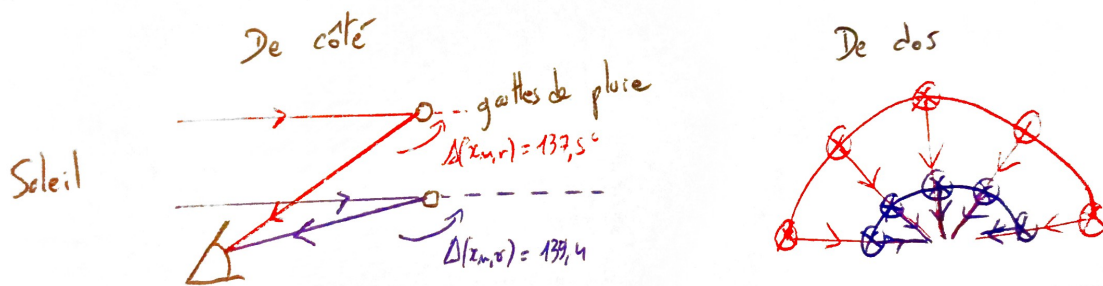
A.N.

$$x_{m,r} = \sqrt{\frac{4 - n_r^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 - 1,330^2}{3}} = 0,862.$$

$$\Delta(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,r}}{n_r}\right) + 2 \arcsin(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,862}{1,330}\right) + 2 \arcsin(0,862) = 2,400\text{rad} = 137,5^\circ.$$

23. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'oeil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

L'observateur voit des rayons rouge et violet, ces rayons arrivent donc au niveau de ses yeux. On sait que le violet a subi une plus grande déviation que le rouge, donc d'après le schéma, l'observateur voit le rayon rouge à l'extérieur de l'arc.



4 L'instrument OSIRIS

Adapté du concours EPITA - IPSA - Physique - MP, PC, PSI, PT (2015)

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov - Guérassimenko (67P/TG) d'un diamètre de 4 km. La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5.

OSIRIS (Optical, Spectroscopic, and Infrared Remote Imaging System) est l'un des instruments scientifiques embarqués à bord de Rosetta. Il s'agit d'un système de deux caméras, une caméra haute résolution (NAC) et une caméra grand champ (WAC). Un des objectifs d'OSIRIS est de parvenir à détecter 67P/TG à une distance de 10^6 km. (Cette distance étant très importante comparée à la taille caractéristique du système optique, la comète peut-être considérée comme un objet situé à l'infini.)

Dans la suite du problème, on modélisera le système optique des caméras par une lentille mince. L'image est formée sur un capteur CCD. Les tableaux suivant donnent les propriétés des caméras NAC et WAC.

	NAC	WAC		Capteur CCD
Distance focale (mm)	717,4	132	Nombre de pixels	2048×2048
Longueur d'onde (nm)	250 - 1000	240 - 720	Taille d'un pixel	$13,5 \times 13,5 \mu\text{m}^2$
Facteur de transmission	0,70	0,70	Rapport signal sur bruit	10

Table 1: Propriétés des caméras NAC et WAC.

24. Rappeler ce que sont les conditions de Gauss en optique géométrique.

Les conditions de Gauss sont **les conditions que doit respecter un système optique afin d'atteindre le stigmatisme approché**. Les conditions de Gauss sont respectées lorsque le système optique exploite uniquement des **rayons paraxiaux** : des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique du système et peu éloignés de cette axe optique.

25. Pourquoi est-il souhaitable d'utiliser les instruments d'optique dans les conditions de Gauss ?

Les instruments d'optique utilisés dans les conditions de Gauss atteignent le stigmatisme approché : **ils produisent une image ponctuelle à partir d'un objet ponctuel**, et non une tâche.

26. On considère que le système optique d'OSIRIS est composé d'une lentille mince convergente de distance focale f' . Reproduire le schéma de la Figure 5 sur votre copie. Placer les foyers principaux objet F et image F' et construire géométriquement le rayon émergent issu de la comète en indiquant la méthode employée.

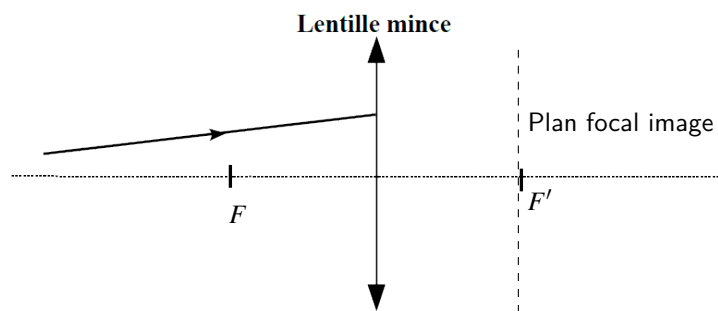


Figure 5: Schéma modélisant système optique d'OSIRIS.

L'objet est à l'infini, les rayons qu'il émet sont donc parallèles. Comme l'objet se trouve hors de l'axe optique du système, tous les rayons vont se croiser en un foyer secondaire image, qui est, par définition, sur le plan focale image de la lentille. Pour savoir où se trouve ce foyer secondaire, on utilise la propriété du rayon passant par le centre optique de la lentille qui donne un rayon émergent non dévié. On trace ce rayon passant par le centre optique et parallèle au rayon noir pour obtenir la position du foyer image secondaire qui nous intéresse. Le rayon émergent issu du rayon noir va également se propager vers ce foyer secondaire.

27. Indiquer à quelle distance de la lentille doit être placé le capteur CCD pour obtenir une image nette de la comète.

La distance de la comète par rapport à la lentille étant très grande devant la taille caractéristique du système optique, on considère que la comète est à l'infini pour la lentille. L'image d'un objet se trouvant à $-\infty$ produit par une lentille mince convergente se situe **au foyer principal image F' de la lentille**.

28. Montrer qu'à une distance de 10^6 km, la taille de l'image géométrique de la comète formée par la caméra WAC est inférieure à 1 pixel.

Considérons l'angle α , l'angle entre l'axe optique et le rayon de la comète. Nous pouvons exprimer cet angle en fonction de la distance de la comète par rapport au centre optique du système $D = 10^6$ km et le rayon de la comète $R = 2$ km

$$\tan \alpha = \frac{R}{D}.$$

Le système OSIRIS étant utilisé dans les conditions de Gauss, nous pouvons écrire

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{R}{D}.$$

Cet angle α est aussi l'angle entre l'axe optique et le rayon de l'image de la comète sur le plan focal, soit sur le capteur CCD. On peut exprimer α en fonction de la distance entre le centre optique de la lentille et le capteur CCD, la distance focale image f' , et le rayon de l'image sur le capteur CCD r

$$\tan \alpha = \frac{r}{f'}$$

soit

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{r}{f'}.$$

On peut ainsi égaliser les deux expressions de α pour obtenir une expression pour r le rayon de l'image de la comète

$$\alpha = \frac{R}{D} = \frac{r}{f'}$$

$$r = f' \frac{R}{D}.$$

La taille de l'image de toute la comète est de $2r$, comparons cette valeur à la taille d'un pixel de $13,5 \mu\text{m}$.

A.N.

$$2r = 2 \times 132.10^{-3} \text{ m} \times \frac{2 \text{ km}}{10^6 \text{ km}}$$

$$2r = 5.10^{-7} \text{ m}$$

$$2r = 0,5 \mu\text{m}.$$

La taille de l'image géométrique de la comète formée par la caméra WAC est inférieure à 1 pixel.