Travaux dirigés

Chapitre 2 - Signaux et composants électroniques

TD I. Grandeurs électriques

Exercice I.1. Associations de résistances ★

Déterminer en fonction de R la résistance équivalente des dipôles suivants.

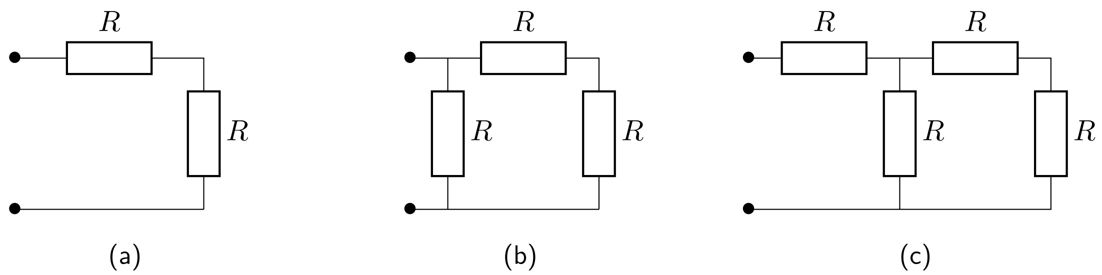


Figure 2.1 – Schémas électriques.

Exercice I.2. Loi des noeuds en terme de potentiels ★

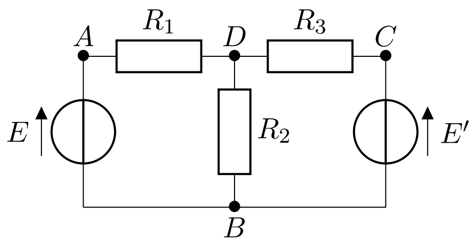


Figure 2.2 – Schéma électrique.

1. **Exprimer** le potentiel V_D en fonction des potentiels V_A, V_B, V_C et des résistances R_1, R_2 et R_3 en partant de la loi des noeuds et de la loi d'Ohm.
   D'après la position des générateurs de tension, on peut placer les flèches des intensités des courants I_1, I_2 et I_3.
   D'après la loi des noeuds, au noeud D la relation entre les intensités des courants est
   $$I_1 + I_3 = I_2.$$
   On place les tensions des résistors en convention récepteur, donc avec des sens opposés aux courants qui alimentent les résistors, soit U_{AD}, U_{CD} et U_{DB}.
   On peut les exprimer en fonction des potentiels et de la loi d'Ohm, soit
   $$U_{AD} = V_A - V_D = R_1 I_1$$
   $$U_{CD} = V_C - V_D = R_3 I_3$$
   $$U_{DB} = V_D - V_B = R_2 I_2.$$
   On isole les intensités I_1, I_2 et I_3
   $$I_1 = \frac{V_A - V_D}{R_1} \qquad I_3 = \frac{V_C - V_D}{R_3} \qquad I_2 = \frac{V_D - V_B}{R_2}.$$

En utilisant la loi des noeuds, il vient que

$$I_1 + I_3 = I_2$$
$$\frac{V_A - V_D}{R_1} + \frac{V_C - V_D}{R_3} = \frac{V_D - V_B}{R_2}$$
$$\frac{V_A}{R_1} - \frac{V_D}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} - \frac{V_D}{R_3} = \frac{V_D}{R_2} - \frac{V_B}{R_2}$$

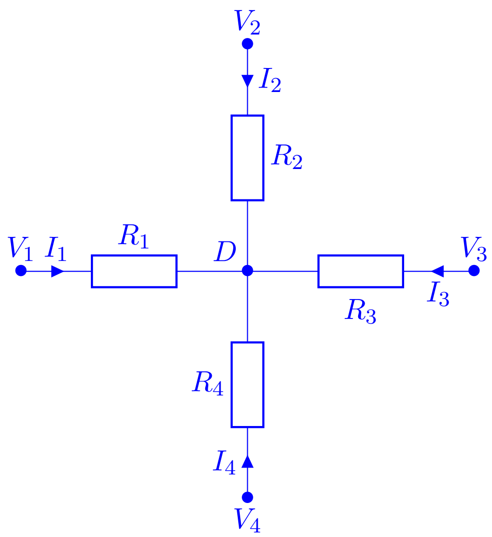
soit

$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_B}{R_2} = \frac{V_D}{R_1} + \frac{V_D}{R_3} + \frac{V_D}{R_2}$$
$$\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_B}{R_2} = V_D\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right)$$

soit

$$\boxed{V_D = \frac{\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_B}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}}.}$$

On a mis en évidence **le théorème de Millman** : soit un potentiel V_D en un point D, entouré de k branches allant de 1 à N, avec une résistance R_k dont le potentiel en amont est V_k sur chacune des branches, et **une intensité I_k allant vers** D dans chacune des branches.



Le théorème de Millman stipule que le potentiel au point D est

$$V_D = \frac{\sum_k^N \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k^N \frac{1}{R_k}}.$$

Or on voit que dans notre circuit, point D est entouré de trois branches avec un potentiel à leur extrémité de V_A, V_B et V_C avec une résistance sur chacune des branches de R_1, R_2 et R_3, d'après le théorème de Millman il vient que

$$V_D = \frac{\sum_k^3 \frac{V_k}{R_k}}{\sum_k^3 \frac{1}{R_k}} = \frac{\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_B}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}}.$$

2. **En déduire** la différence de potentiel U_{DB} en fonction de E, E' dans le cas où $R_1 = R_2 = R$ et $R_3 = 2R$. On simplifiera le calcul en choisissant la masse au point B.
   Comme la masse est choisie au point B, le potentiel $V_B = 0$ par convention, ainsi

$$U_{DB} = V_D - V_B = V_D = \frac{\frac{V_A}{R_1} + \frac{V_C}{R_3} + \frac{V_B}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}}.$$

   De plus

$$E = V_A - V_B = V_A$$

$$E' = V_C - V_B = V_C$$

   donc

$$V_D = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{E'}{R_3} + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{E'}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}}$$

   or $R_1 = R_2 = R$ et $R_3 = 2R$ donc

$$V_D = \frac{\frac{E}{R} + \frac{E'}{2R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{E + \frac{E'}{2}}{1 + \frac{1}{2} + 1} = \frac{E + \frac{E'}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}(2E + E').$$

Exercice I.3. Double pont diviseur ★

Dans ce circuit les valeurs des composants sont $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = R_4 = 20\,\Omega$, $E = 5\,\mathrm{V}$.

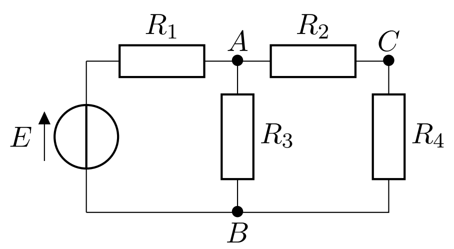


Figure 2.3 – Schéma électrique.

1. **Exprimer** la résistance R_{234} équivalente à R_2, R_3 et R_4 entre les points A et B.
2. **Calculer** U_{CB} en utilisant deux fois le diviseur de tension.

Exercice I.4. Modèle de pile ★

Une pile présente une différence de potentiel de 2,2 V quand elle est traversée par un courant d'intensité égale à 0,2 A. La différence de potentiel monte à 3,0 V lorsque l'intensité du courant descend à 0,12 A.

1. **Préciser** numériquement la résistance interne et la force électromotrice (f.e.m) du modèle de Thévenin de la pile.
2. **Calculer** la puissance fournie par la pile au reste du circuit ainsi que la puissance perdue par effet Joule à l'intérieur de la pile lors de la deuxième expérience.

Exercice I.5. Calcul d'une tension ★★

Déterminer la tension entre le noeud N et la masse du circuit.

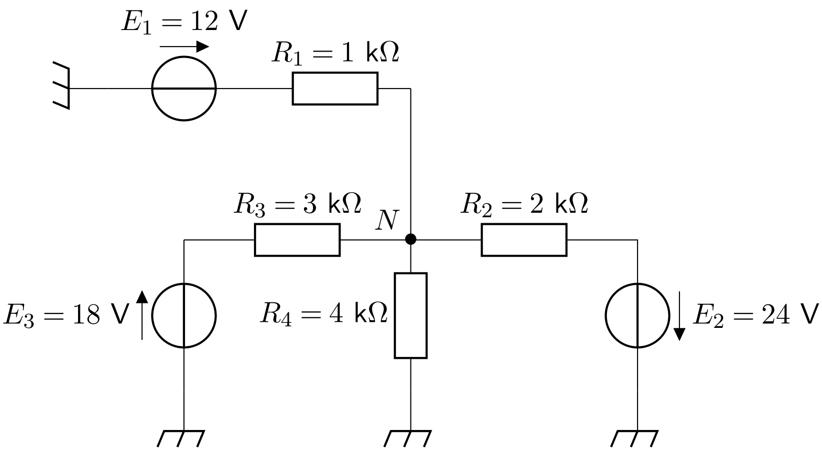


Figure 2.4 – Schéma électrique.

D'après l'orientation des flèches des tensions E_1, E_2 et E_3 des f.e.m des générateurs de tension, on peut choisir un sens pour les intensités des courants I_1, I_2 et I_3 qui respecte la convention générateur. On choisit n'importe quel sens pour l'intensité du courant I_4, du moment que la flèche de tension U_4 aux bornes du résistor de résistance R_4 soit dans le sens opposé au courant d'intensité I_4.

On représente également les flèches des tensions U_1, U_2 et U_3 aux bornes des résistors de résistances R_1, R_2 et R_3 afin de respecter la convention récepteur.

D'après la loi des noeuds on peut exprimer la relation entre les intensités des courants au noeud N

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

On exprime également la différence de potentiel entre le point N et la masse M dans chaque branche du circuit

$$V_N - V_M = E_1 - U_1 = E_1 - R_1 I_1 \qquad \text{soit} \qquad V_N = E_1 - R_1 I_1$$
$$V_N - V_M = U_2 - E_2 = R_2 I_2 - E_2 \qquad \text{soit} \qquad V_N = R_2 I_2 - E_2$$
$$V_N - V_M = E_3 - U_3 = E_3 + R_3 I_3 \qquad \text{soit} \qquad V_N = E_3 - R_3 I_3$$
$$V_N - V_M = U_4 = R_4 I_4 \qquad \text{soit} \qquad V_N = R_4 I_4.$$

Dans ces relations, l'inconnue à exprimer est V_N, les grandeurs que l'on connait sont les résistances R_1, R_2, R_3, R_4 et les f.e.m E_1, E_2 et E_3. Les intensités I_1, I_2, I_3 et I_4 sont inconnues, il nous faut les exprimer en fonctions des grandeurs connues.

Utilisons les expressions précédentes pour isoler chacune des intensités

$$I_1 = \frac{E_1 - V_N}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_N + E_2}{R_2} \qquad I_3 = \frac{E_3 - V_N}{R_3} \qquad I_4 = \frac{V_N}{R_4}.$$

On peut alors utiliser ces expressions des intensités pour les injecter dans la relation liant les intensités obtenue grâce à la loi des noeuds

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$
$$\frac{E_1 - V_N}{R_1} + \frac{E_3 - V_N}{R_3} = \frac{V_N + E_2}{R_2} + \frac{V_N}{R_4}.$$

On constate que les inconnues I_1, I_2, I_3 et I_4 ont disparu, et il ne reste plus que des grandeurs connues.

On modifie cette relation afin d'isoler V_N

$$\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_2}{R_2} = V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)$$

$$\boxed{V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}.}$$

On pouvait également obtenir ce résultat en utilisant le théorème de Millman présenté plus tôt.
Exprimons les potentiels à l'extrémités des résistors afin de d'utiliser le théorème de Millman :

- si on nomme V_1 le potentiel entre le résistor de résistance R_1 et le générateur de f.e.m E_1, il vient que $E_1 = V_1 - V_M = V_1$
- si on nomme V_2 le potentiel entre le résistor de résistance R_2 et le générateur de f.e.m E_2, il vient que $E_2 = V_M - V_2 = -V_2$
- si on nomme V_3 le potentiel entre le résistor de résistance R_3 et le générateur de f.e.m E_3, il vient que $E_3 = V_3 - V_M = V_3$
- le potentiel à l'extrémité du résistor de résistance R_4 est le potentiel de la masse $V_4 = V_M = 0$.

D'après le théorème de Millman

$$V_N = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

soit

$$V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{(-E_2)}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \frac{0}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

$$\boxed{V_N = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}.}$$

Exercice I.6. Capteur de déformation ★★

Le montage ci-dessous comporte un générateur de f.e.m constante E, trois résistors de même résistance R et un capteur de déformation équivalent à une résistance électrique $R(1+\alpha)$ où α est un nombre sans dimension que l'on souhaite déterminer car il est proportionnelle à la déformation appliquée sur le capteur. On mesure la tension U_{DB}.

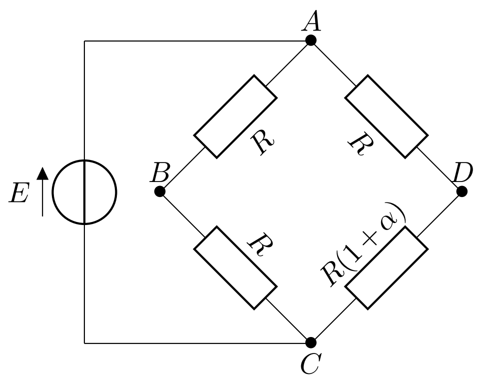


Figure 2.5 – Schéma électrique.

1. **Établir** l'expression de $U = U_{DB}$ en fonction de E et α. On pourra utilement préciser la masse dans le circuit.

D'après l'expression des tensions

$$U_{DB} = V_D - V_B$$

on peut ajouter des termes afin de faire apparaitre les potentiels V_A et V_C

$$U_{DB} = V_D - V_B + (V_A - V_A) + (V_C - V_C)$$

$$U_{DB} = V_D - V_A + V_C - V_B + V_A - V_C$$

$$U_{DB} = -U_{AD} - U_{BC} + U_{AC}.$$

On constate que la tension U_{AC} est aussi égale à la f.e.m E : $E = V_A - V_C$ soit

$$U_{DB} = E - U_{AD} - U_{BC}.$$

Il nous faut maintenant exprimer les tensions U_{AD} et U_{BC} en fonction des données du problème. Pour cela on définit l'intensité des courants I circulant dans la branche CA, I_1 circulant dans la branche ABC et I_2 circulant dans la branche ADC. On peut alors utilise la loi d'Ohm

$$U_{DB} = E - RI_2 - RI_1.$$

Or, dans la branche ABC la résistance équivalent est $R_{eq} = 2R$, dans la branche ADC la résistance équivalente est $R'_{eq} = (2+\alpha)R$, ainsi on peut exprimer la tension U_{AC} qui est la même dans ces deux branches

$$U_{AC} = 2RI_1 = (2+\alpha)RI_2$$

avec $U_{AC} = E$.
On peut alors obtenir les valeurs des intensités des courants I_1 et I_2

$$I_1 = \frac{E}{2R} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{E}{(2+\alpha)R}.$$

On peut ainsi introduire ces expressions des intensités dans l'expression de U_{DB}

$$U_{DB} = E - RI_2 - RI_1 = E - E\frac{R}{(2+\alpha)R} - E\frac{R}{2R}$$

$$U_{DB} = E\left(1 - \frac{1}{2+\alpha} - \frac{1}{2}\right)$$

$$U_{DB} = E\frac{4 + 2\alpha - 2 - 2 - \alpha}{2(2+\alpha)}$$

$$U_{DB} = E\frac{\alpha}{2(2+\alpha)}$$

2. **Déterminer** la valeur de U_{DB} lorsqu'il n'y a pas de déformation, soit $\alpha = 0$, et lors d'une déformation correspondant à $\alpha = 3.10^{-6}$.
Lorsqu'il n'y a pas de déformation, soit lorsque $\alpha = 0$, la valeur de U_{DB} est

$$U_{DB} = E\frac{0}{2(2+0)} = 0$$

la tension est nulle.
Lorsqu'il y a déformation , α est différent de 0.
A.N. pour $\alpha = 3.10^{-6}$

$$U_{DB} = E\frac{3.10^{-6}}{2(2+3.10^{-6})} = E \times 0,7.10^{-6}.$$

La tension n'est plus nulle et vaut une fraction de la f.e.m du générateur. **Une déformation est détectée dès que la valeur de la tension U_{DB} est différente de 0.**

Exercice I.7. Mesure d'une résistance à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre ★ ★

Pour mesurer la résistance d'un résistor, on dispose d'un voltmètre, d'un ampèremètre et d'un générateur linéaire de tension à vide $E = 10V$ et de résistance interne $r_g = 50\ \Omega$. On envisage les deux montages ci-dessous.

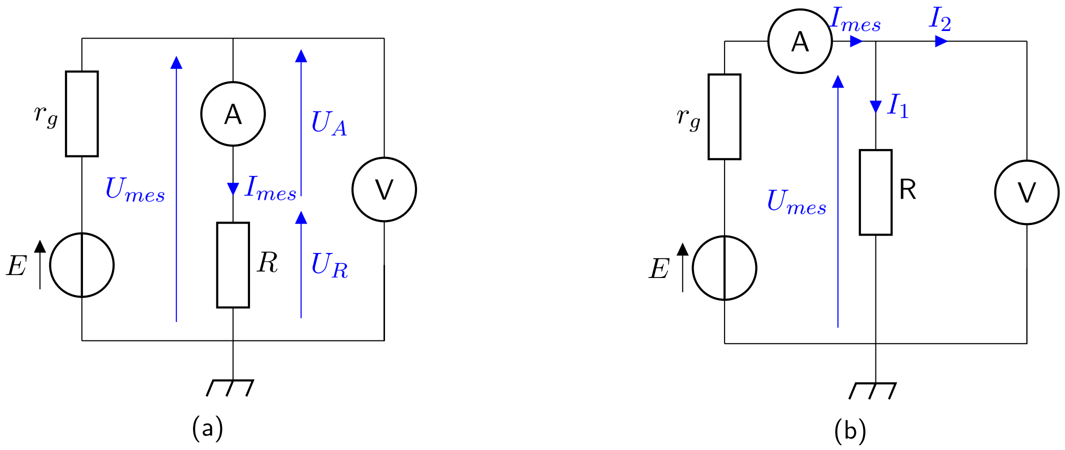


Figure 2.6 – Mesures de la résistance d'un dipôle (a) en longue dérivation et (b) en courte dérivation.

On modélise le volmètre par sa résistance interne typique $R_V = 10$ MΩ et l'ampèremètre par sa résistance interne typique $R_A = 100\ \Omega$.

On estie la résistance du résistor par la formule $R_{mes} = \frac{U_{mes}}{I_{mes}}$ où U_{mes} et I_{mes} sont les valeurs mesurées par les deux appareils.

1. **Exprimer** R_{mes} en fonction de R, R_A et R_V dans le cas du montage longue dérivation.
   Identifions la tension U_{mes} et l'intensité du courant I_{mes} dans le cas du montage longue dérivation.
   La tension U_{mes} mesurée par le voltmètre est en fait la tension aux bornes de l'ampèremètre et du résistor.
   L'intensité I_{mes} est l'intensité du courant passant par l'ampèremètre et le résistor. C'est pourquoi on peut écrire

$$U_{mes} = U_A + U_R = R_A I_{mes} + R I_{mes} = (R_A + R)\, I_{mes} \quad \text{soit} \quad R_A + R = \frac{U_{mes}}{I_{mes}}.$$

   avec U_A la tension aux bornes de l'ampèremètre et U_R la tension aux bornes du résistor.
   Donc la résistance mesurée à l'aide d'une mesure en longue dérivation est la résistance équivalente de l'association série de l'ampèremètre considéré comme un résistor de résistance R_A et du résistor de résistance R.

$$\boxed{R_{mes} = R_A + R.}$$

2. **Faire de même** pour le montage courte dérivation.
   Identifions la tension U_{mes} et l'intensité du courant I_{mes} dans le cas du montage courte dérivation.
   La tension U_{mes} mesurée par le voltmètre est en fait la tension aux bornes du résistor U_R.
   L'intensité I_{mes} est l'intensité qui se divise au noeud reliant le résistor et l'ampèremètre. On cherche I_1 l'intensité du courant passant par le résistor, on utilise le diviseur de courant pour l'exprimer en fonction de $I_m es$.

$$I_1 = I_{mes} \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}} = I_{mes} \frac{1}{1 + \frac{R}{R_V}} = I_{mes} \frac{R_V}{R_V + R}.$$

   Ainsi

$$R_{mes} = \frac{U_{mes}}{I_{mes}} = \frac{U_R}{I_{mes}} = \frac{R I_1}{I_{mes}} = \frac{R I_{mes}}{I_{mes}} \frac{R_V}{R_V + R} = \frac{R R_V}{R_V + R}.$$

Donc la résistance mesurée à l'aide d'une mesure en courte dérivation est la résistance équivalente de l'association en parallèle du voltmètre considéré comme un résistor de résistance R_V et du résistor de résistance R.

$$\boxed{R_{mes} = \frac{RR_V}{R_V + R}.}$$

3. **En déduire** le type de montage le plus adapté pour mesurer une résistance R de l'ordre de $10\ \Omega$; de l'ordre de $10^3\ \Omega$ ou de l'ordre de $10^6\ \Omega$, à l'aide des valeurs typiques des résistances internes de l'ampèremètre et du voltmètre données.
Calculons l'erreur relative ϵ entre la résitance réelle et la résistance mesurée dans ces deux cas pour les deux types de montages

$$\epsilon = \frac{|R - R_{mes}|}{R}.$$

- En longue dérivation l'erreur est

$$\epsilon = \frac{|R - (R_A + R)|}{R} = \frac{R_A}{R}.$$

Pour une résistance de valeur faible, l'application numérique donne :

$$\epsilon_f = \frac{100\,\Omega}{10\,\Omega} = 10.$$

Pour une résistance de valeur moyenne, l'application numérique donne :

$$\epsilon_m = \frac{100\,\Omega}{1 \times 10^3\,\Omega} = 0{,}1.$$

Pour une résistance de valeur élevée, l'application numérique donne :

$$\epsilon_e = \frac{100\,\Omega}{1 \times 10^6\,\Omega} = 1 \times 10^{-4}.$$

On voit que plus la résistance à mesurer est élévée, plus l'erreur relative est faible. **Le montage longue dérivation est donc à utiliser pour la mesure des résistances élevées.**

- En courte dérivation l'erreur est

$$\epsilon = \frac{\left|R - \frac{RR_V}{R_V + R}\right|}{R} = \left|\frac{RR_V + R^2 - RR_V}{R_V + R}\right| \frac{1}{R} = \frac{R}{R_V + R}.$$

Pour une résistance de valeur faible, l'application numérique donne :

$$\epsilon_f = \frac{10\,\Omega}{1 \times 10^7\,\Omega + 10\,\Omega} = 1 \times 10^{-6}.$$

Pour une résistance de valeur moyenne, l'application numérique donne :

$$\epsilon_m = \frac{1 \times 10^3\,\Omega}{1 \times 10^7\,\Omega + 1 \times 10^3\,\Omega} = 1 \times 10^{-4}.$$

Pour une résistance de valeur élevée, l'application numérique donne :

$$\epsilon_e = \frac{1 \times 10^6\,\Omega}{1 \times 10^7\,\Omega + 1 \times 10^6\,\Omega} = 0{,}9.$$

On voit que plus la résistance à mesurer est faible, plus l'erreur relative est faible. **Le montage courte dérivation est donc à utiliser pour la mesure des résistances faibles.**

Exercice I.8. Association de résistances et d'intensité ★★

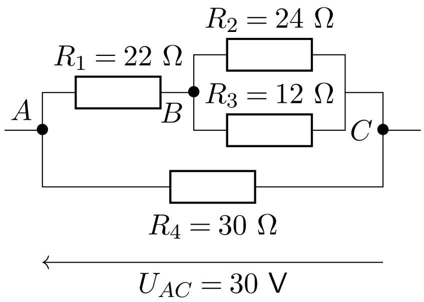


Figure 2.7 – Schéma électrique.

Pour le montage électrique représenté ci-dessus, **déterminer** :

1. la résistance équivalente entre les noeuds A et C ;
   La résistance R_{23} est la résistance équivalente aux résistance R_2 et R_3 en parallèle

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

La résistance R_{123} est la résistance équivalente aux résistance R_1 et R_{23} en série

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

A.N.

$$\boxed{R_{123} = \frac{22(24+12) + 24 \times 12}{24+12} = 30\ \Omega.}$$

2. la valeur de la tension U_{BC} ;
   Un courant d'intensité I arrivant en A va se diviser en deux courants d'intensité I_1 dans la branche ABC et d'intensité I_2 dans la branche du résitor R_4, soit d'après la loi des noeuds $I = I_1 + I_2$.
   La tension U_{BC} est telle que $U_{BC} = R_{23} I_1$.
   Il faut trouver une expression de I_1 en fonction des grandeurs données.

On remarque que l'on peut modéliser le montage des résistance R_{123} et R_4 montées en parallèle, par une résistance équivalente R_{1234} telle que

$$R_{1234} = \frac{1}{1/R_4 + 1/R_{123}} = \frac{R_4 R_{123}}{R_4 + R_{123}}.$$

A.N.

$$R_{1234} = \frac{30 \times 30}{30 + 30} = 15\ \Omega.$$

La tension aux bornes de cette résistance est U_{AC} et l'intensité du courant qui la traverse est I, soit

$$U_{AC} = R_{1234} I.$$

Or cette tension est aussi la même dans la branche ABC, et dans la branche du résistor R_4, soit

$$U_{AC} = R_{1234} I \qquad U_{AC} = R_1 I_1 + U_{BC} \qquad U_{AC} = R_4 I_2.$$

On peut exprimer chaque intensité

$$I = \frac{U_{AC}}{R_{1234}} \qquad I_1 = \frac{U_{AC} - U_{BC}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_{AC}}{R_4}.$$

Or d'après la loi des noeuds

$$I = I_1 + I_2$$

donc

$$\frac{U_{AC}}{R_{1234}} = \frac{U_{AC} - U_{BC}}{R_1} + \frac{U_{AC}}{R_4}$$

on obtient une relation entre des valeurs connues et la valeurs inconnue U_{BC}. On isole donc U_{BC}

$$\frac{U_{AC}}{R_{1234}} - \frac{U_{AC}}{R_4} = \frac{U_{AC} - U_{BC}}{R_1}$$

$$\frac{U_{BC}}{R_1} = \frac{U_{AC}}{R_1} - \frac{U_{AC}}{R_{1234}} + \frac{U_{AC}}{R_4}$$

$$U_{BC} = U_{AC}\left(1 - \frac{R_1}{R_{1234}} + \frac{R_1}{R_4}\right).$$

A.N.

$$\boxed{U_{BC} = 30 \text{ V}\left(1 - \frac{22}{15} + \frac{22}{30}\right) = 8 \text{ V}.}$$

3. les intensités des courants dans chaque résitors.
   Dans le résistor de résistance R_4 l'intensité I_2 est telle que

$$U_{AC} = R_4 I_2 \qquad \text{soit} \qquad I_2 = \frac{U_{AC}}{R_4}$$

A.N.

$$\boxed{I_2 = \frac{30}{30} = 1 \text{ A}.}$$

Dans la branche ABC, la tension aux bornes du résistor de résistance R_1 est

$$U_{AB} = U_{AC} - U_{BC}$$

et l'intensité du courant traversant ce résitor est I_1 telle que

$$U_{AB} = R_1 I_1$$

soit

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{U_{AC} - U_{BC}}{R_1}$$

A.N.

$$\boxed{I_1 = \frac{30 - 8}{22} = 1 \text{ A}.}$$

Entre les noeuds B et C le courant d'intensité I_1 se divise en deux courant d'intensité I_a traversant le résistor de résistance R_2 et d'intensité I_b traversant le résistor de résistance R_3, soit

$$I_1 = I_a + I_b$$

or

$$U_{BC} = R_2 I_a = R_3 I_b$$

soit

$$I_a = \frac{U_{BC}}{R_2} \qquad \text{et} \qquad I_b = \frac{U_{BC}}{R_3}.$$

A.N.

$$\boxed{I_a = \frac{8}{24} = 0{,}3 \text{ A} \qquad \text{et} \qquad I_b = \frac{8}{12} = 0{,}7\text{A}.}$$

Exercice I.9. Deux générateurs réels ★ ★

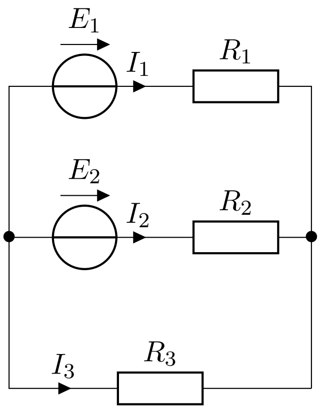


Figure 2.8 – Schéma électrique.

Dans le montage ci-dessus, $E_1 = 24$ V, $E_2 = 32$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ et $R_3 = 50\ \Omega$.
Calculer les valeurs des trois intensités I_1, I_2 et I_3.
En utilisant la loi des noeuds au noeud reliant les trois branches

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad (1).$$

En effectuant trois lois des mailles, il vient que

$$\begin{aligned} E_1 - U_1 + U_2 - E_2 &= 0 \qquad (2) \\ E_2 - U_2 + U_3 &= 0 \qquad (3) \\ E_1 - U_1 + U_3 &= 0 \qquad (4). \end{aligned}$$

Nous obtenons 4 relations. Mais attention, les trois dernières ne sont pas indépendantes, en effet on voit qu'en soustrayant (3) à (4) nous retrouvons la relation (2) :

$$\begin{aligned} E_1 - U_1 + U_3 - E_2 + U_2 - U_3 &= 0 \\ E_1 - U_1 + U_2 - E_2 &= 0 \qquad (2). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc utiliser les 3 relations (1), (3) et (4) car elles sont indépendantes pour trouver les 3 inconnues I_1, I_2 et I_3.

Associant d'abord les relations (1) et (3) en modifiant d'abord la relation (1) afin de faire apparaître les tensions U_1, U_2 et U_3 et d'en exprimer une à partir des deux autres, par exemple $U_3(U_1,U_2)$.

$$\frac{U_1}{R_1}+\frac{U_2}{R_2}+\frac{U_3}{R_3}=0 \quad \text{soit} \quad U_3=-U_1\frac{R_3}{R_1}-U_2\frac{R_3}{R_2}.$$

On introduit cette expression de U_3 dans la relation (3)

$$E_2-U_2+U_3=0 \qquad E_2-U_2-U_1\frac{R_3}{R_1}-U_2\frac{R_3}{R_2}=0 \qquad E_2-U_1\frac{R_3}{R_1}-U_2\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)=0.$$

On peut alors exprimer une des deux tensions U_1 ou U_2 en fonction de l'autre. Choisissons $U_2(U_1)$

$$U_2=\frac{E_2-U_1\frac{R_3}{R_1}}{1+\frac{R_3}{R_2}}.$$

Associant maintenant les relations (1) et (4) pour obtenir une nouvelle expression de U_2.

$$E_1-U_1+U_3=0 \qquad E_1-U_1-U_1\frac{R_3}{R_1}-U_2\frac{R_3}{R_2}=0 \qquad E_1-U_2\frac{R_3}{R_2}-U_1\left(1+\frac{R_3}{R_1}\right)=0.$$

On peut alors de nouveau exprimer $U_2(U_1)$

$$U_2=E_1\frac{R_2}{R_3}-U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On peut alors utiliser les deux expressions de U_2 pour obtenir une relation ne faisant intervenir que l'inconnue U_1.

$$\begin{aligned}
\frac{E_2-U_1\frac{R_3}{R_1}}{1+\frac{R_3}{R_2}} &= E_1\frac{R_2}{R_3}-U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}\right)\\
E_2-U_1\frac{R_3}{R_1} &= E_1\frac{R_2}{R_3}\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)-U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}\right)\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)\\
E_2-U_1\frac{R_3}{R_1} &= E_1\left(\frac{R_2}{R_3}+1\right)-U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+1+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_3}{R_1}\right)\\
U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+1+\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_3}{R_1}-\frac{R_3}{R_1}\right) &= E_1\left(\frac{R_2}{R_3}+1\right)-E_2\\
U_1 &= \frac{E_1R_1(R_2+R_3)-E_2R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi U_2 à partir de la deuxième expression de $U_2(U_1)$

$$\begin{aligned}
U_2&=E_1\frac{R_2}{R_3}-U_1\left(\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}\right)\\
U_2&=E_1\frac{R_2}{R_3}-\frac{E_1R_1(R_2+R_3)-E_2R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\,\frac{R_1R_2+R_2R_3}{R_1R_3}\\
U_2&=E_1\left(\frac{R_2}{R_3}-\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\,\frac{R_1R_2+R_2R_3}{R_1R_3}\right)+E_2\frac{R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\,\frac{R_1R_2+R_2R_3}{R_1R_3}\\
U_2&=E_1\frac{R_1R_2^2+R_1R_2R_3+R_2^2R_3-(R_2+R_3)(R_1R_2+R_2R_3)}{R_3(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}+E_2\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\\
U_2&=E_1\frac{R_1R_2^2+R_1R_2R_3+R_2^2R_3-R_1R_2^2-R_1R_2R_3-R_2^2R_3-R_2R_3^2}{R_3(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}+E_2\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}\\
U_2&=E_1\frac{-R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}+E_2\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}
\end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{E_2R_2\left(R_1+R_3\right)-E_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.$$

On peut alors utiliser la relation (4) pour obtenir U_3.

$$\begin{aligned}
E_1 - U_1 + U_3 = 0 \\
U_3 &= U_1 - E_1 \\
U_3 &= \frac{E_1R_1\left(R_2+R_3\right)-E_2R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} - E_1 \\
U_3 &= \frac{E_1\left(R_1R_2+R_1R_3-R_1R_2-R_1R_3-R_2R_3\right)-E_2R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}
\end{aligned}$$

$$U_3 = -\frac{E_1R_2R_3+E_2R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.$$

À partir des expressions de U_1, U_2 et U_3 on obtient finalement I_1, I_2 et I_3 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = \frac{E_1\left(R_2+R_3\right)-E_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \\
I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = \frac{E_2\left(R_1+R_3\right)-E_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} \\
I_3 &= \frac{U_3}{R_2} = -\frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}.
\end{aligned}$$

A.N.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{24\left(4+50\right)-32\times 50}{2\times 4+2\times 50+4\times 50} = -1{,}0\,\mathrm{A} \\
I_2 &= \frac{32\left(2+50\right)-24\times 50}{2\times 4+2\times 50+4\times 50} = 1{,}5\,\mathrm{A} \\
I_3 &= -\frac{24\times 4+32\times 2}{2\times 4+2\times 50+4\times 50} = -0{,}5\,\mathrm{A}.
\end{aligned}$$

On valide nos résultat en remarquant que la somme des intensités est bien nulle.