

TD II. Circuits linéaires du deuxième ordre

Exercice II.1. Résolutions d'équations différentielles du deuxième ordre ★ ★

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

2.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

3.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

4.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 3.$$

5.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} - 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

6.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 2 \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

7.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4 \frac{df(t)}{dt} + 4f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -3.$$

8.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

9.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -1.$$

10.
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

Exercice II.2. Circuit LC et générateur de courant ★ ★

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

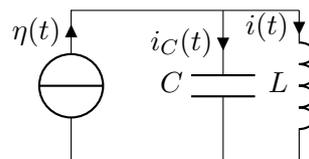


Figure 3.7 – Schéma électrique.

1. **Exprimer** la dérivée temporelle de l'énergie totale, $d\mathcal{E}_{\text{tot}}/dt$ en fonction de $i(t)$ et $di(t)/dt$.

2. **Justifier** qualitativement que \mathcal{E}_{tot} est constante. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. Retrouver cette équation par application des lois de l'électronique.
3. **Établir** les conditions initiales sur $i(t)$ et sa dérivée.
4. **En déduire** l'expression de $i(t)$.

Exercice II.3. Circuit bouchon ★ ★

On souhaite déterminer l'équation d'évolution de l'intensité du courant i_2 circulant dans la bobine dans le circuit suivant. Le résistor a une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$, la bobine a une inductance $L = 100 \text{ mH}$ et le condensateur a une capacité $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

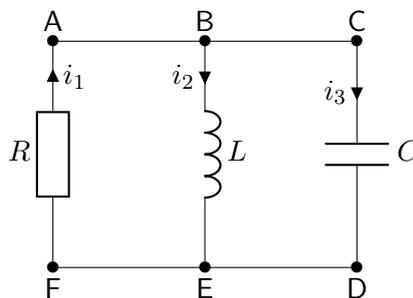


Figure 3.8 – Schéma électrique.

1. **Utiliser** la loi des nœuds pour **établir** une relation entre i_1 , i_2 et i_3 .
2. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABEF pour **établir** une expression de i_1 dépendant de L , R et i_2 .
3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille BCDE pour **établir** une expression de u_C , la tension aux bornes du condensateur en fonction de L et i_2 .
4. **Exprimer** i_3 en fonction de u_C , puis i_3 en fonction de L , C et i_2 .
5. À partir des relations précédentes et de la loi des nœuds, **déterminer** l'équation différentielle que respecte i_2 .
6. À partir de l'équation canonique impliquant le facteur de qualité Q , **exprimer** la pulsation propre du circuit ω_0 et Q en fonction des paramètres du système. **Donner** les valeurs de Q et ω_0 .
7. **Déterminer** à quel type de régime sera soumis ce système. **Donner** l'équation d'évolution de i_2 dans ce régime à partir des conditions initiales suivantes : la charge initiale du condensateur est $q(t=0) = 1 \text{ }\mu\text{C}$ et l'intensité initiale du courant la bobine est $i_2(t=0) = 1 \text{ mA}$.

Exercice II.4. Influence d'un condensateur sur un circuit RL ★ ★

Un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne r est branché aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R .

Pour $t < 0$ l'interrupteur K est ouvert ; on suppose qu'à $t = 0$ le circuit a atteint un régime permanent. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$ ce qui branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité C .

L'objet de cet exercice est l'étude de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine pour $t > 0$.