

TD I. Circuits linéaires du premier ordre

Exercice I.1. Résolutions d'équations différentielles du premier ordre ★

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1.

$$\frac{df(t)}{dt} - 15f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 56.$$

2.

$$\frac{df(t)}{dt} - f(t) = 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 5.$$

3.

$$\frac{df(t)}{dt} - 3f(t) = 5 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

4.

$$\frac{df(t)}{dt} - 2f(t) = 12 \quad \text{et} \quad f(0) = 3.$$

1.

$$f_h(t) = Ae^{15t} \quad \text{et} \quad f(t) = 56e^{15t}.$$

2.

$$f_p(t) = -1 \quad \text{et} \quad f_h(t) = Ae^t \quad \text{et} \quad f(t) = 6e^t - 1.$$

3.

$$f_p(t) = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad f_h(t) = Ae^{3t} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{8}{3}e^{3t} - \frac{5}{3}.$$

4.

$$f_p(t) = -6 \quad \text{et} \quad f_h(t) = Ae^{2t} \quad \text{et} \quad f(t) = 9e^{2t} - 6.$$

Exercice I.2. Conditions initiales et régime permanent avec R et C ★

On considère le circuit électrique ci-dessous. À $t = 0$ le condensateur est déchargé et on allume le générateur idéal afin qu'il impose une tension E .

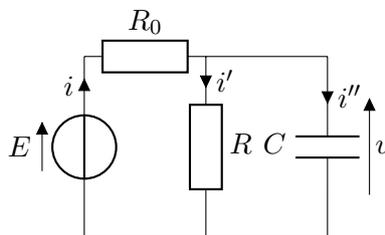


Figure 3.1 – Schéma électrique.

1. **Déterminer** les expressions de i , i' , i'' et u à l'instant $t = 0^+$ juste après l'allumage du générateur. Le condensateur étant déchargé avant l'allumage du générateur, il vient que $q(t = 0^-) = 0$, donc $u(t = 0^-) = 0$. Comme la tension aux bornes d'un condensateur est continue, la valeur de la tension à l'instant $t = 0^-$ est la même qu'à l'instant $t = 0^+$, donc $u(t = 0^+) = 0$.

Le résistor et le condensateur étant soumis à la même tension, il vient que

$$u_R = u$$

$$Ri' = 0$$

donc l'intensité du courant parcourant la résistance à $t = 0^+$ est nulle.

D'après la loi des nœuds $i = i' + i''$. Comme $i' = 0$, il vient que $i = i''$.

En utilisant la loi des mailles dans la grande maille du circuit, il vient que

$$E = R_0 i + u$$

et à $t = 0^+$

$$E = R_0 i + 0.$$

Finalement : $i = E/R_0$, $i' = 0$, $i'' = E/R_0$ et $u = 0$. Le condensateur déchargé se comporte comme un interrupteur fermé ou un fil : il n'y a pas de différence de potentiel à ses bornes et il ne consomme pas de courant, ce dernier passe donc dans le condensateur plutôt que dans la résistance R .

2. **Déterminer** les expressions de i , i' , i'' et u lorsque le régime permanent est atteint.

Lorsque le régime permanent est atteint le condensateur est chargé, sa tension est $u(t) = E$ et reste constante. Or d'après la loi du condensateur

$$i''(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

donc, comme u est constante, l'intensité du courant dans le condensateur est nulle : $i''(t) = 0$. Lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un interrupteur fermé, il empêche le courant de passer. Le résistor et le condensateur étant soumis à la même tension, il vient que

$$u_R = u$$

$$Ri' = E$$

donc l'intensité du courant parcourant la résistance en régime permanent est $i' = E/R$.

D'après la loi des nœuds $i = i' + i''$. Comme $i'' = 0$, il vient que $i = i'$.

En utilisant la loi des mailles dans la petite maille du circuit, il vient que

$$E = R_0 i + Ri'$$

et en régime permanent

$$E = (R_0 + R)i.$$

Finalement : $i = E/(R_0 + R)$, $i' = E/(R_0 + R)$, $i'' = 0$ et $u = E$. Le condensateur chargé se comporte comme un interrupteur ouvert : il ne laisse pas passer le courant.

Exercice I.3. Conditions initiales et régime permanent avec L et C ★

On considère le circuit électrique ci-dessous. À $t = 0$ le condensateur est déchargé et on allume le générateur idéal afin qu'il impose une tension E .

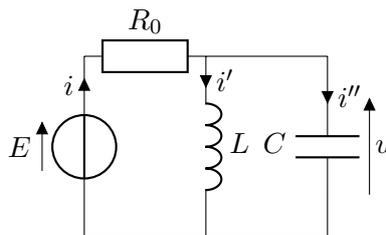


Figure 3.2 – Schéma électrique.

1. **Déterminer** les expressions de i , i' , i'' et u à l'instant $t = 0^+$ juste après l'allumage du générateur. Le condensateur étant déchargé avant l'allumage du générateur, il vient que $q(t = 0^-) = 0$, donc $u(t = 0^-) = 0$. Comme la tension aux bornes d'un condensateur est continue, la valeur de la tension à l'instant $t = 0^-$ est la même qu'à l'instant $t = 0^+$, donc $u(t = 0^+) = 0$. L'intensité du courant dans la bobine est également continue, la valeur de $i'(t = 0^-)$ étant nulle, il vient que $i'(t = 0^+) = 0$. D'après la loi des nœuds $i = i' + i''$. Comme $i' = 0$, il vient que $i = i''$. En utilisant la loi des mailles dans la grande maille du circuit, il vient que

$$E = R_0 i + u$$

et à $t = 0^+$

$$E = R_0 i + 0.$$

Finalement : $i = E/R_0$, $i' = 0$, $i'' = E/R_0$ et $u = 0$. Le condensateur déchargé se comporte comme un interrupteur fermé ou comme un fil : il n'y a pas de différence de potentiel à ses bornes et il ne consomme pas de courant, ce dernier passe donc dans le condensateur plutôt que dans la bobine.

2. **Déterminer** les expressions de i , i' , i'' et u lorsque le régime permanent est atteint. Lorsque le régime permanent est atteint le condensateur est chargé, sa tension est $u(t) = E$ et reste constante. Or d'après la loi du condensateur

$$i''(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

donc, comme u est constante, l'intensité du courant dans le condensateur est nulle : $i''(t) = 0$. Lorsque le condensateur est chargé, il se comporte comme un interrupteur ouvert, il empêche le courant de passer. Si on considère le condensateur comme un interrupteur ouvert, le circuit se résume à un circuit RL, ainsi $i = i'$. Nous avons vu qu'en régime permanent, l'intensité du courant i' dans la bobine est constante, donc d'après la loi de la bobine

$$u_L = C \frac{di'(t)}{dt}$$

$$u_L = 0$$

donc la tension aux bornes de la bobine est nulle : elle se comporte comme un interrupteur fermé en régime permanent (lorsqu'elle est "chargée").

En utilisant la loi des mailles dans la petite maille du circuit, il vient que

$$E = R_0 i + u_L$$

et en régime permanent

$$E = R_0 i + 0.$$

Finalement : $i = E/R_0$, $i' = E/R_0$, $i'' = 0$ et $u = E$. En régime permanent, le condensateur chargé se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine "chargée" se comporte comme un interrupteur fermé.

Exercice I.4. Décharge rapide d'un condensateur ★

On charge un condensateur de capacité $C = 1000 \mu\text{FF}$ avec une tension de 15 V.

1. **Déterminer** l'énergie électrique \mathcal{E}_C stockée dans le condensateur. L'énergie stockée dans un condensateur est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E^2$$

avec E la tension du condensateur dans le régime permanent.

A.N.

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \times 1000 \cdot 10^{-6} \times 15^2 = 113 \text{ mJ.}$$

2. On relie les deux fils de connexions du condensateur entre eux afin que le condensateur se décharge dans les fils. Le point le plus résistif du circuit formé est le point de contact entre les deux fils. On considère que ce point de contact à une résistance $R = 0,1 \Omega$.

Déterminer la constante de temps du circuit.

On a affaire à un circuit constitué d'un condensateur et d'un résistor : le point de contact des deux fils. En utilisant la loi des mailles dans ce circuit

$$u_C(t) + u_R(t) = 0$$

$$u_C(t) + Ri(t) = 0$$

$$u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} = 0.$$

Afin que le terme $RC \frac{du_C(t)}{dt}$ soit homogène à une tension, comme le terme $\frac{du_C(t)}{dt}$ est homogène à une tension divisée par une durée, il faut que le terme RC soit homogène à une durée. La constante de temps τ est donc $\tau = RC$.

A.N.

$$\tau = 0,1 \times 1000 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

3. On considère que la puissance moyenne fournie par le condensateur lorsqu'il se décharge est égale à l'énergie fournie par le condensateur divisée par sa durée de sa décharge.

Déterminer la valeur de la puissance moyenne fournie par le condensateur lorsqu'on branche ses fils de connexion entre eux. **Justifier** qu'après contact entre les deux fils du condensateur, ils soient soudés entre eux.

La puissance moyenne fournie par le condensateur lorsqu'il se décharge dans le résistor est donc, d'après l'énoncé, soit

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\mathcal{E}_C}{\tau}.$$

A.N.

$$\mathcal{P}_C = \frac{113 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ kW.}$$

La puissance fournie par le condensateur est transformée chaleur par effet Joule au niveau de point de contact. Cette puissance est assez importante pour faire fondre les fils électriques.

Exercice I.5. Allumage d'un moteur essence ★

Le circuit d'allumage d'un moteur essence est schématisé ci-dessous.

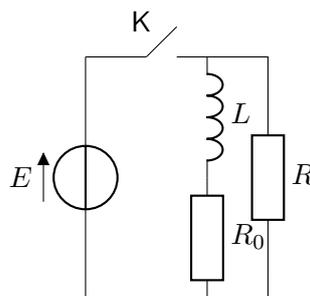


Figure 3.3 – Schéma électrique.

Le générateur de tension est supposé idéal et il impose une fem $E = 12 \text{ V}$, et le circuit est tel que $L = 0,8 \text{ H}$, $R_0 = 8 \Omega$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$ et que l'interrupteur K est initialement fermé.

1. **Décrire** le comportement d'une bobine en régime permanent.

En régime permanent la bobine se comporte comme un interrupteur fermé : la tension à ses bornes est nulle.

2. **Déterminer** le courant i traversant la bobine.

Lorsque l'interrupteur K est fermé, la bobine est "chargée", on est en présence d'un circuit avec deux résistors en parallèle. Ces deux résistors sont soumis à la même tension E (on peut s'en convaincre en utilisant la loi des mailles sur la grande maille et la petite maille), donc

$$E = R_0 i$$

donc le courant i traversant la bobine est $i = E/R_0$.

3. L'interrupteur est ouvert à l'instant $t = 0$. **Déterminer** l'équation différentielle que respecte le courant $i(t)$.

Lorsque l'interrupteur K est ouvert, le circuit qu'on étudie se résume au circuit LR_0R . On peut réunir les deux résistors dans un résistor équivalent de résistance $R_{eq} = R + R_0$ car ils sont en série. La loi des mailles dans ce circuit LR_{eq} donne

$$0 = u_L(t) + R_{eq}i(t)$$

$$0 = L \frac{di(t)}{dt} + R_{eq}i(t)$$

$$0 = \frac{L}{R_{eq}} \frac{di(t)}{dt} + i(t).$$

4. **Réaliser** le bilan de puissance sur la bobine et sur le résistor de résistance R .

Le bilan de puissance sur la bobine est

$$\mathcal{P}_L(t) = u_L(t)i(t)$$

$$\mathcal{P}_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$$

$$\mathcal{P}_L(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2(t) \right).$$

Le bilan de puissance sur le résistor de résistance R

$$\mathcal{P}_R(t) = u_R(t)i(t)$$

$$\mathcal{P}_R(t) = R i^2(t).$$

5. **Déterminer** la tension maximale aux bornes du résistor de résistance R . On exploite cette tension pour créer l'étincelle qui provoque la combustion du mélange air-essence dans le moteur.

Pour déterminer l'instant où la tension est maximale aux bornes du résistor de résistance R , il faut déterminer l'instant où l'intensité du courant $i(t)$ traversant le résistor est maximale, car

$$u_R(t) = R i(t).$$

Il faut donc déterminer $i(t)$ à partir de l'équation différentielle. Comme c'est une équation homogène

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{R_{eq}}{L} i(t)$$

on voit que la solution est de la forme

$$i(t) = Ae^{-tR_{eq}/L}.$$

On sait qu'à l'instant initiale $t = 0$ où l'interrupteur est ouvert l'intensité dans la bobine est $i(t = 0) = E/R_0$, donc

$$i(t = 0) = Ae^{-0 \times R_{eq}/L} = E/R_0$$

$$i(t = 0) = A = E/R_0.$$

L'équation d'évolution de l'intensité du courant $i(t)$ est donc

$$i(t) = \frac{E}{R_0} e^{-tR_{eq}/L}.$$

L'intensité du courant est donc maximale à $t = 0$, puis elle décroît jusqu'à une valeur nulle en régime permanent.

La tension maximale aux bornes du résistor de résistance R est donc

$$u_R = R \frac{E}{R_0} = E \frac{R}{R_0}.$$

A.N.

$$u_R = 12 \times \frac{1 \cdot 10^3}{8} = 1,5 \text{ kV}.$$

Exercice I.6. Évolution d'une tension aux bornes d'un condensateur ★ ★

On étudie le circuit suivant dont on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Les résistors ont une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$, le condensateur a une capacité $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ et la fem des générateurs de tension est $E_0 = 15 \text{ V}$.

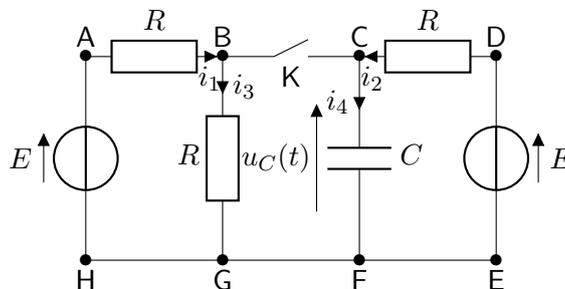


Figure 3.4 – Schéma électrique.

1. Avant $t = 0$, l'interrupteur est ouvert, dans le circuit CDEF le condensateur est chargé depuis très longtemps. **Donner** la valeur de u_C à $t = 0$.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, dans la maille CDEF, le condensateur est chargé en régime permanent à la tension du générateur de tension, soit

$$u_C(t = 0^-) = E.$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t = 0) = E$.

2. **Établir** la loi des nœuds dans le circuit.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des nœuds dans le circuit est telle quel

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t).$$

3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ADEH pour établir que $i_1 = i_2$. On utilisera l'intensité du courant $i_0 \equiv i_1 = i_2$ dans la suite de l'exercice.

Dans la maille ADEH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_1(t) + Ri_2(t) - E = 0$$

$$Ri_2(t) = Ri_1(t)$$

$$i_2(t) = i_1(t) \equiv i_0(t).$$

4. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABGH pour établir une expression de i_3 en fonction de E , R et i_0 .

Dans la maille ABGH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_0(t) - Ri_3(t) = 0$$

$$i_3(t) = \frac{E}{R} - i_0(t).$$

5. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ACFH pour établir une expression de i_0 en fonction de E , R et u_C .

Dans la maille ACFH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_0(t) - u_C(t) = 0$$

$$i_0(t) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}u_C(t).$$

6. **Exprimer** i_4 en fonction de u_C .

D'après la loi du condensateur

$$i_4(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

7. À partir de la loi des nœuds et des relations précédentes, **déterminer** l'équation différentielle que respecte u_C .

D'après les relations précédentes

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t)$$

$$2i_0(t) = \frac{E}{R} - i_0(t) + C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$3i_0(t) = \frac{E}{R} + C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$3\frac{E}{R} - 3\frac{1}{R}u_C(t) = \frac{E}{R} + C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$2\frac{E}{R} = \frac{3}{R}u_C(t) + C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\frac{2}{3}E = u_C(t) + \frac{RC}{3} \frac{du_C(t)}{dt}.$$

8. **Résoudre** l'équation différentielle pour obtenir l'expression de u_C en fonction de E , R et C .

La constante de temps du circuit $\tau = RC/3$.

La solution particulière est $u_{C,p} = \frac{2}{3}E$.

La solution homogène est $u_{C,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$, avec A une constante à déterminer.

La solution générale est $u_C(t) = \frac{2}{3}E + Ae^{-t/\tau}$.

D'après la condition initiale

$$u_C(t=0) = \frac{2}{3}E + A = E$$

$$A = \frac{1}{3}E$$

donc

$$u_C(t) = E \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-t/\tau} \right).$$

Exercice I.7. Évolution d'une tension aux bornes d'une bobine ★ ★

On étudie le circuit suivant dont on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Les résistors ont une résistance $R = 30 \Omega$, la bobine a une inductance $L = 100 \text{ mH}$ et la fem des générateurs de tension est $E_0 = 12 \text{ V}$.

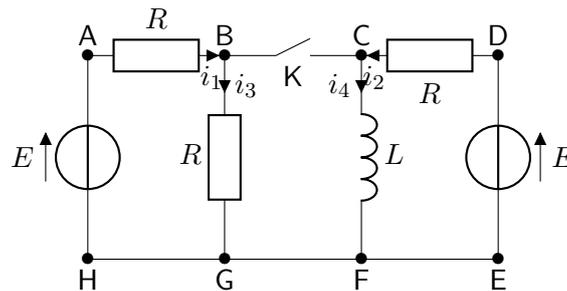


Figure 3.5 – Schéma électrique.

1. Avant $t = 0$, l'interrupteur est ouvert, dans le circuit CDEF la bobine a atteint le régime permanent depuis longtemps. **Donner** la valeur de i_4 à $t = 0$.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, dans la maille CDEF, la bobine a atteint le régime permanent, elle se comporte comme un fil. La maille CDEF est donc constituée d'un générateur de tension et d'un résistor. En utilisant la loi des mailles

$$E = Ri_2(t = 0^-)$$

donc

$$i_2(t = 0^-) = \frac{E}{R}.$$

La bobine se comportant comme un fil, il vient que $i_2(t = 0^-) = i_4(t = 0^-)$.

Par continuité de l'intensité du courant traversant la bobine, $i_4(t = 0) = \frac{E}{R}$.

2. **Établir** la loi des nœuds dans le circuit.

Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des nœuds dans le circuit est telle que

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t).$$

3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ADEH pour établir que $i_1 = i_2$. On utilisera l'intensité du courant $i_0 \equiv i_1 = i_2$ dans la suite de l'exercice.

Dans la maille ADEH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_1(t) + Ri_2(t) - E = 0$$

$$Ri_2(t) = Ri_1(t)$$

$$i_2(t) = i_1(t) \equiv i_0(t).$$

4. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABGH pour établir une expression de i_3 en fonction de E , R et i_0 .

Dans la maille ABGH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_0(t) - Ri_3(t) = 0$$

$$i_3(t) = \frac{E}{R} - i_0(t).$$

5. À partir de la relation précédente et de la loi des nœuds, **établir** une expression de i_0 en fonction de E , R et i_4 .

D'après la loi des nœuds

$$2i_0(t) = i_3(t) + i_4(t)$$

$$2i_0(t) = \frac{E}{R} - i_0(t) + i_4(t)$$

$$3i_0(t) = \frac{E}{R} + i_4(t)$$

$$i_0(t) = \frac{E}{3R} + \frac{1}{3}i_4(t).$$

6. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ACFH pour établir une expression l'équation différentielle que respecte i_4 .

Dans la maille ACFH, la loi des mailles donne

$$E - Ri_0(t) - u_L(t) = 0$$

$$E - Ri_0(t) - L \frac{di_4(t)}{dt} = 0$$

$$E - R \frac{E}{3R} - \frac{R}{3}i_4(t) - L \frac{di_4(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{2}{3}E = \frac{R}{3}i_4(t) + L \frac{di_4(t)}{dt}$$

$$2 \frac{E}{R} = i_4(t) + \frac{3L}{R} \frac{di_4(t)}{dt}.$$

7. **Résoudre** l'équation différentielle pour obtenir l'expression de i_4 en fonction de E , R et L .

La constante de temps du circuit $\tau = \frac{3L}{R}$.

La solution particulière est $i_{4,p} = 2\frac{E}{R}$.

La solution homogène est $i_{4,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$, avec A une constante à déterminer.

La solution générale est $i_4(t) = 2\frac{E}{R} + Ae^{-t/\tau}$.

D'après la condition initiale

$$i_4(t=0) = 2\frac{E}{R} + A = \frac{E}{R}$$

$$A = -\frac{E}{R}$$

donc

$$i_4(t) = \frac{E}{R} (2 - e^{-t/\tau}).$$

Exercice I.8. Fonctionnement d'une minuterie ★ ★

Étudions le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable. Le montage du circuit est constitué d'un générateur de tension idéale de fem $E = 30$ V, d'un interrupteur K, d'un conducteur ohmique de résistance R , d'un condensateur de capacité C , d'un bouton poussoir qui joue le rôle d'un interrupteur (il est fermé seulement quand on appuie dessus), d'un composant électronique M qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, $U_l = 20$ V caractéristique du composant. Le composant électronique possède une alimentation propre et ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC (la tension aux bornes du condensateur n'est pas influencée par la présence du composant M).

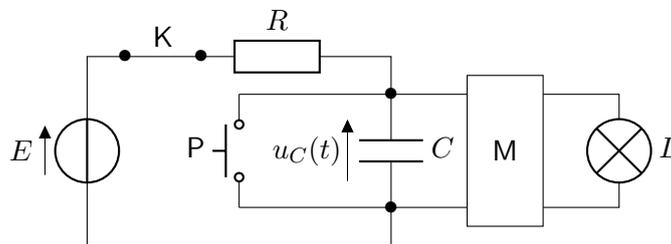


Figure 3.6 – Schéma électrique.

À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché.

1. **Indiquer** le branchement à réaliser pour observer la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ à l'aide d'un oscilloscope.
2. **Donner** l'équation différentielle que respecte $u_C(t)$.
3. **Résoudre** cette équation différentielle.
4. **Donner** l'expression de la constante de temps τ du circuit, et **réaliser** l'application numérique pour $R = 100$ k Ω et $C = 200$ μ F.
5. **Donner** l'expression de t_e , l'instant à partir duquel la lampe s'éteint, soit quand $u_C(t)$ atteint la valeur limite U_l (la durée d'allumage de la lampe est donc $t_e - 0$).

Calculer la valeur de t_e .

6. **Tracer** la courbe d'évolution de $u_C(t)$ entre $t = 0$ et $t = 140$ s lorsqu'à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K et que le bouton poussoir P est relâché.

Faire apparaître E , τ , T_R , t_e , le régime transitoire et le régime permanent.

7. **Déterminer** quel paramètre du montage on peut modifier pour augmenter la durée d'allumage de la lampe.
8. **Calculer** la valeur de la résistance R à fixer pour que la durée d'allumage de la lampe soit de 1 minute avec une capacité du condensateur $C = 200 \mu\text{F}$.
9. On appuie sur le bouton poussoir. **Décrire** la variation de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ (on considère que la résistance du circuit formé par le condensateur et le bouton poussoir est proche de 0).
Décrire ce qui se passe lorsque la lampe est déjà allumée et lorsque la lampe est éteinte.