DS 2 : circuits électriques

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 3 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $x \ll 1$: $f(x) \approx 1 + \alpha x$.

---

1 Étude d'un circuit RL

Adapté du concours concours agronomique et vétérinaire - BCPST (2004)

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue de force électromotrice E. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

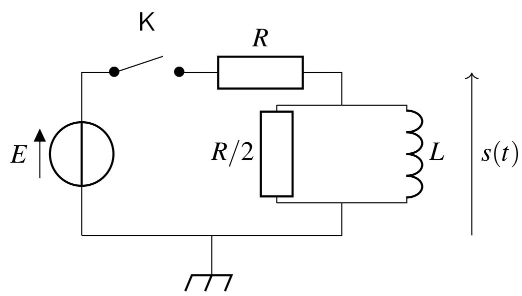


Figure 1: Schéma du circuit électrique

1. Y a-t-il continuité de la tension $s(t)$ en $t = 0$? Y a-t-il continuité du courant dans la résistance R en $t = 0$? Commenter physiquement les réponses. En déduire le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$.

   La tension $s(t)$ ne correspond pas à la tension aux bornes d'un condensateur, il n'y a pas *a priori* continuité de la tension en $t = 0$.

   Il n'y a pas *a priori* continuité du courant dans la résistance R en $t = 0$.

   Néanmoins, il y a continuité du courant dans la bobine en $t = 0$, le courant est don nul dans la bobine au voisinage de $t = 0^+$. Le circuit correspond à un générateur en série avec deux résistors de résistance R et $R/2$.

Pour obtenir le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$ il faut déterminer la tension aux bornes du résistor de résistance $R/2$. Pour cela on utilise la loi du diviseur de tension à utiliser pour des résistors branchés en série. Ainsi

$$s(t = 0^+) = E\frac{R/2}{R/2+R} = \frac{E}{3}.$$

2. Déterminer également le comportement asymptotique de $s(t)$ lorsque $t \to \infty$.

   Lorsque $t \to \infty$ la bobine se comporte comme un fil, la tension est donc nulle aux bornes de la bobine, $s(t \to \infty) = 0$.

3. Utiliser la loi des mailles dans les trois mailles du circuits.

   Dans la maille formée par le générateur et les résistors de résistances R et $R/2$ il vient que

$$E = Ri + \frac{R}{2}i_1$$

avec i et i_1 les intensités du courant traversant respectivement le résistor de résistance R et le résistor de résistance $R/2$.

Dans la maille formée par le générateur, le résistor de résistance R et la bobine il vient que

$$E = Ri + u_L$$

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

avec $i_2 1$ l'intensité du courant traversant la bobine.

Dans la maille formée par le résistor de résistance $R/2$ et la bobine il vient que

$$\frac{R}{2}i_1 = u_L$$

$$\frac{R}{2}i_1 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

4. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant R en fonction de l'intensité du courant dans la branche contenant L.

   On utilise la deuxième loi des mailles exprimée plus haut, soit

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

5. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant $R/2$ en fonction l'intensité du courant dans la branche contenant L.

   On utilise la troisième loi des mailles exprimée plus haut, soit

$$\frac{R}{2}i_1 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$i_1 = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

6. Utiliser la loi des noeuds pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans la branche contenant L.

Si on applique la loi des noeuds il vient que

$$i = i_1 + i_2$$

avec i, i_1, i_2 les intensités du courant traversant respectivement le résistor de résistance R, le résistor de résistance $R/2$ et la bobine.

On peut exprimer i et i_1 en fonction de i_2, soit

$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2$$

$$\boxed{i_2 + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}.}$$

7. Exprimer $s(t)$ en fonction du courant dans la branche contenant L.

La tension $s(t)$ correspond à la tension aux bornes de la bobine, soit

$$s(t) = u_L$$

$$s(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

8. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.

Afin d'établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$, il faut faire apparaître $s(t)$ dans l'équation différentielle respectée par i_2 : il faut dériver et multiplier par L, soit

$$L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right) = L\frac{\mathrm{d}E/R}{\mathrm{d}t}$$

or $\frac{E}{R}$ est constant donc

$$\boxed{s(t) + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

9. En déduire $s(t)$.

On constate que l'équation différentielle respectée par $s(t)$ correspond à une équation différentielle du premier ordre homogène, la solution générale est donc

$$s(t) = Ae^{-Rt/3L}$$

avec A une constante d'intégration à définir à partir de la condition initiale sur $s(t)$.

On a montré que $s(t = 0^+) = \frac{E}{3}$ donc

$$s(t = 0^+) = Ae^0 = \frac{E}{3}$$

$$A = \frac{E}{3}$$

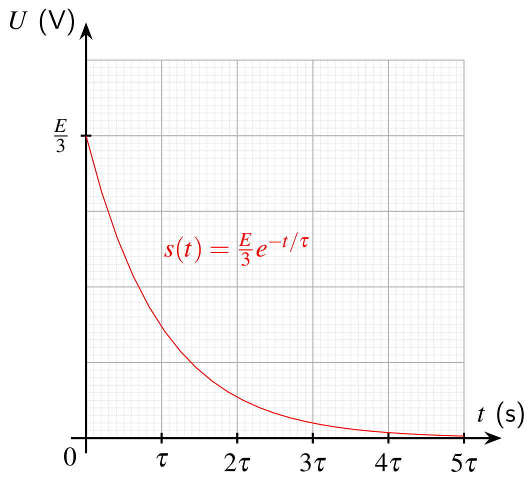
donc

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}e^{-Rt/3L}.}$$

Si on introduit la constante de temps du circuit $\tau = 3L/R$ il vient que

$$s(t) = \frac{E}{3}e^{-t/\tau}.$$

10. Tracer l'allure de $s(t)$.



11. Exprimer en fonction de L et R le temps t_0 au bout duquel $s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10}$.

Au bout de la durée t_0 la tension $s(t_0)$ est

$$s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10} = \frac{E}{3}\frac{1}{10}$$

or

$$s(t_0) = \frac{E}{3}e^{-t_0/\tau}$$

donc

$$\frac{1}{10} = e^{-t_0/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -t_0/\tau$$

$$t_0 = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\boxed{t_0 = \frac{3L}{R}\ln(10)\,.}$$

12. En déduire une méthode expérimentale pour déterminer t_0 à l'oscilloscope. On précisera le montage électrique à réaliser et la mesure à effectuer concrètement.

Pour visualiser $s(t)$ on branche l'oscilloscope entre l'extrémité inférieure droite du circuit (où on met la masse de l'oscilloscope, reliée à la masse du générateur) et l'extrémité supérieure droite du circuit ; on règle l'affichage sur l'écran de telle sorte que le signal passe de $s(t=0+)$ à 0 sur toute la hauteur de l'écran de l'oscilloscope, puis on lit sur l'axe horizontal (échelle de temps) le temps au bout duquel on a $s(t0) = s(t=0+)/10$.

13. On mesure expérimentalement : $t_0 = 3{,}0\,\mu s$. On donne : $R = 1000\,\Omega$. En déduire L.

À partir de l'expression de t_0 précédente

$$t_0 = \frac{3L}{R}\ln(10)$$

$$L = \frac{Rt_0}{3\ln(10)}.$$

A.N.

$$L = \frac{1000 \times 3{,}0.10^{-6}}{3\ln(10)}$$

$$\boxed{L = 4{,}2 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}.}$$

14. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse effectivement mesurer t_0, en utilisant la méthode indiquée à la question 12, à l'oscilloscope ?

    Afin de pouvoir observer la variation de $s(t)$ de $s(t=0+)$ à 0 sur toute la hauteur de l'écran de l'oscilloscope, il faut que la demi-période $T/2$ de la tension imposée par le génerateur soit supérieure ou égale à $4,6\tau$, soit

    $$\frac{T}{2} \geq 4,6\tau$$

    soit

    $$T \geq 9,2\tau$$

    donc

    $$f \leq \frac{1}{9,2\tau}$$

    soit en ordre de grandeur

    $$f \leq \frac{1}{10\tau}.$$

2 Charge d'un condensateur à travers une résistance

Adapté du concours communs polytechniques - TSI (2005)

Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance R et un condensateur de capacité C placés en série.
On place aux bornes A et B du dipôle un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E et un interrupteur K.
Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit v_s la tension aux bornes du condensateur.
A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

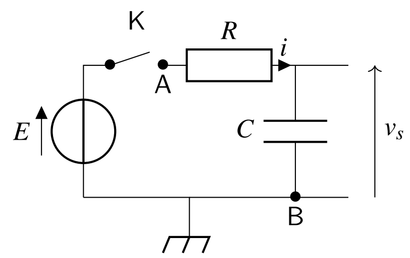


Figure 2: Schéma du circuit électrique

15. Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps très long (infini) après la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de v_s et de l'intensité i dans le circuit au bout d'un temps très long.

    En régime permanent la tension aux bornes du condensateur v_s devient constante, l'intensité du courant $i(t)$ traversant le condensateur est donc

    $$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

    Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

    Ainsi, en régime permanent, la tension aux bornes du condensateur est $v_s = E$, et l'intensité du courant le traversant est $i = 0$.

16. Exprimer la constante de temps τ du circuit en fonction des paramètres du système.

    La constante de temps du circuit est $\tau = RC$.

17. Déterminer son unité à partir d'une analyse dimensionnelle.

    La tension aux bornes du résistor de résistance R est

    $$u_R = Ri$$

or l'intensité du courant dans le circuit est telle que

$$i = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$u_R = RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}.$$

Si on mène une analyse dimensionnelle on voit que

$$[u_R] = \left[RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right] = \mathsf{V}$$

or on sait que

$$\left[RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right] = [RC]\,\frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}} = \mathsf{V}$$

donc

$$[RC] = \mathsf{V}\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{V}} = \mathsf{T}.$$

La constante $\tau = RC$ est bien homogène à une durée, son unité est la seconde.

18. On se place à $t \geq 0$. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit v_s.

On utilise la loi des mailles dans le circuit, il vient que

$$E = u_R + v_s$$

$$E = Ri + v_s$$

$$\boxed{E = RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s.}$$

19. Établir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$). Trouver à partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question 15.

On recherche la solution particulière de l'équation différentielle. Cette solution est de la même forme que le second membre, c'est-à-dire constante, ainsi

$$E = RC\frac{\mathrm{d}v_{s,p}}{\mathrm{d}t} + v_{s,p}$$

$$E = v_{s,p}.$$

On recherche la solution homogène de l'équation différentielle, soit

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}v_{s,h}}{\mathrm{d}t} + v_{s,h}.$$

La solution de cette équation est de la forme

$$v_{s,h} = Ae^{-t/\tau}$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du circuit et A une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale sur v_s.

La solution générale est la somme des deux solutions, particulière et homogène, soit

$$v_s = v_{s,p} + v_{s,h}$$

$$v_s = E + Ae^{-t/\tau}.$$

Déterminons A à partir de la condition initiale sur v_s. Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, donc la tension à $t=0^-$ est égale à la tension à $t=0^+$, or à $t=0^-$ la v_s est nulle, donc la tension initiale aux bornes du condensateur est $v_s(t=0)=0$. Ainsi

$$v_s(t=0)=E+Ae^0=0$$

$$A=-E.$$

L'expression de la tension aux bornes du condensateur est donc

$$\boxed{v_s=E\left(1-e^{-t/\tau}\right).}$$

20. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v_s(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t=0$. Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

En régime permanent la tension v_s tend vers la tension imposée par le générateur, soit E. L'expression de l'asymptote représentée en pointillés bleus sur la figure ci-dessous est $U=E$.

À l'origine $t\to 0$, on peut mener un développement limité sur la fonction exponentielle sachant que

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1+x.$$

Ainsi on obtient l'expression de la tangente à l'origine

$$\lim_{t\to 0} E\left(1-e^{-t/\tau}\right)=E\left(1-(1-t/\tau)\right)=\frac{E}{\tau}t.$$

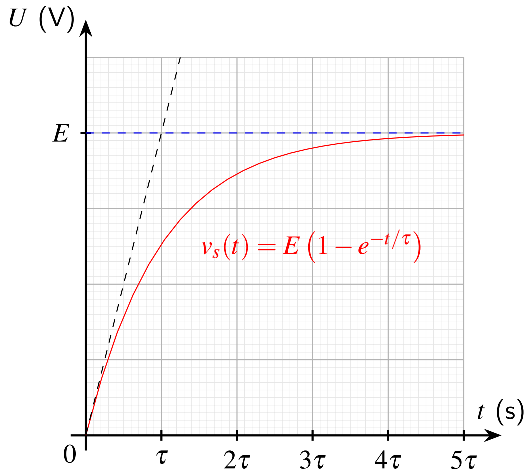
On l'a représenté en pointillés noirs sur la figure ci-dessous.

Pour obtenir les coordonnés du point d'intersection de la tangente et de l'asymptote, il faut égaliser les deux fonctions les représentant, soit

$$E=\frac{E}{\tau}t$$

$$t=\tau.$$

La tangente et de l'asymptote se rejoignent à l'abscisse $t=\tau$. Cela correspond à l'ordonnée $\frac{E}{\tau}\tau=E$.



21. Déterminer, en fonction de τ , l'expression du temps t_1 à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1% de sa charge finale.

À l'instant t_1, la tension v_s est telle que

$$v_s(t_1) = \frac{99}{100}E$$

or

$$v_s(t_1) = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

donc

$$\frac{99}{100}E = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$
$$\frac{99}{100} = 1 - e^{-t_1/\tau}$$
$$e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{100}$$
$$\frac{t_1}{\tau} = -\ln\left(\frac{1}{100}\right)$$
$$t_1 = \tau \ln(100)$$
$$\boxed{t_1 = 4,6\tau.}$$

22. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq 0$. (L'orientation de $i(t)$ est précisée sur le schéma).

D'après la loi du condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)$$
$$i(t) = \frac{EC}{\tau}e^{-t/\tau}$$
$$i(t) = \frac{EC}{RC}e^{-t/\tau}$$
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}.}$$

23. Exprimer l'énergie $\mathscr{E}_C$ emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C et de E.

L'énergie électrique stockée dans un condensateur est

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}Cv_s^2$$

or lorsque la charge du condensateur est terminée sa tension est $v_s = E$ donc l'énergie emmagasinée par le condensateur est

$$\boxed{\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}CE^2.}$$

24. Déterminer, à partir des résultats de la partie précédente, l'expression de l'énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera $\mathscr{E}_J$ en fonction de C et de E.

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance à un instant t est

$$\mathscr{P}_J = u_R i = Ri^2 = R\frac{E^2}{R^2}e^{-2t/\tau} = \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}.$$

Afin d'obtenir l'énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge il faut intégrer la puissance dissipée par effet Joule entre l'instant initial $t = 0$ et un instant $t \to \infty$ soit

$$\mathscr{E}_J = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\frac{\tau}{2}$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\frac{RC}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{E}_J = \frac{1}{2}CE^2.}$$

25. Montrer, à partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie $\mathscr{E}_g$ fournie par le générateur au cours de la charge est égale à $\mathscr{E}_g = CE^2$. Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.

La puissance fournie par le générateur $\mathscr{P}_g$ est telle que

$$\mathscr{P}_g = Ei = E\frac{E}{R}e^{-t/\tau} = \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}.$$

Afin d'obtenir l'énergie $\mathscr{E}_g$ fournie par le générateur au cours de la charge il faut intégrer la puissance fournie entre l'instant initial $t = 0$ et un instant $t \to \infty$ soit

$$\mathscr{E}_g = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}\tau$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}RC$$

$$\boxed{\mathscr{E}_g = CE^2.}$$

On constate que l'énergie fournie par le générateur est égale à la somme de l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance et l'énergie reçue par le condensateur

$$\mathscr{E}_J + \mathscr{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2 = CE^2$$

la conservation de l'énergie est bien vérifiée.

3 Fonctionnement d'une minuterie

Étudions le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable. Le montage du circuit est constitué d'un générateur de tension idéale de fem $E = 30$ V, d'un interrupteur K, d'un conducteur ohmique de résistance R, d'un condensateur de capacité C, d'un bouton poussoir qui joue le rôle d'un interrupteur (il est fermé seulement quand on appuie dessus), d'un composant électronique M qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, U_l =20 V caractéristique du composant. Le composant électronique possède une alimentation propre et ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC (la tension aux bornes du condensateur n'est pas influencée par la présence du composant M).

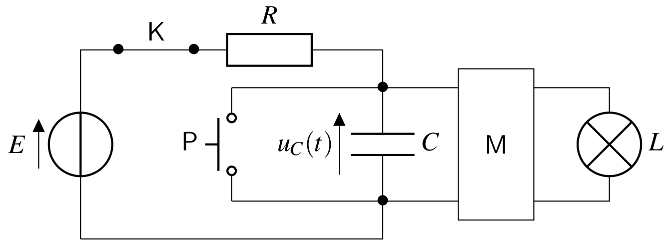


Figure 3: Schéma électrique.

À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché.

26. Indiquer le branchement à réaliser pour observer la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ à l'aide d'un oscilloscope.

27. Donner l'équation différentielle que respecte $u_C(t)$.

28. Résoudre cette équation différentielle.

29. Donner l'expression de la constante de temps τ du circuit, et réaliser l'application numérique pour $R = 100$ kΩ et $C = 200$ µF.

30. Donner l'expression de t_e, l'instant à partir duquel la lampe s'éteint, soit quand $u_C(t)$ atteint la valeur limite U_l (la durée d'allumage de la lampe est donc $t_e - 0$).

    Calculer la valeur de t_e.

31. Tracer la courbe d'évolution de $u_C(t)$ entre $t = 0$ et $t = 140$ s lorsqu'à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K et que le bouton poussoir P est relâché.

    Faire apparaître E, τ, T_R, t_e, le régime transitoire et le régime permanent.

32. Déterminer quel paramètre du montage on peut modifier pour augmenter la durée d'allumage de la lampe.

33. Calculer la valeur de la résistance R à fixer pour que la durée d'allumage de la lampe soit de 1 minute avec une capacité du condensateur $C = 200$ µF.

34. On appuie sur le bouton poussoir. Décrire la variation de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ (on considère que la résistance du circuit formé par le condensateur et le bouton poussoir est proche de 0).

    Décrire ce qui se passe lorsque la lampe est déjà allumée et lorsque la lampe est éteinte.