TD II. Circuits linéaires du deuxième ordre

Exercice II.1. Résolutions d'équations différentielles du deuxième ordre ★ ★

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

2.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

3.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

4.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 3.$$

5.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} - 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

6.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

7.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 4f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -3.$$

8.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

9.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -1.$$

10.
$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

1.
$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$$

$$r_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t}$$

$$f(0) = 1 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2 = -2K_1 - K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -3 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 4 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-t}.$$

2.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$$

$$r_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t}$$

$$f(0) = 1 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 = -2K_1 - K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -2 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 3 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-t}.$$

3.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = -4 \times (-1) = 4 > 0$$

$$r_1 = \frac{-\sqrt{4}}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -K_1 e^{-t} + K_2 e^{t}$$

$$f(0) = 1 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 = -K_1 + K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{t}.$$

4.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$$

$$r_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t}$$

$$f(0) = 2 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 3 = -2K_1 - K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -5 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 7 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = -5e^{-2t} + 7e^{-t}.$$

5.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$$

$$r_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -2K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t}$$

$$f(0) = 1 = K_1 + K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2 = -2K_1 + K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad K_2 = \frac{4}{3} \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{t}.$$

6.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 = 0$$

$$r = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

$$f(t) = (K_1 t + K_2)\, e^t \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = K_1 t e^t + K_1 e^t + K_2 e^t$$

$$f(0) = 2 = K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 = K_1 + K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 2 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = (-t + 2)\, e^t.$$

7.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = 4^2 - 4 \times 4 = 0$$

$$r = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f(t) = (K_1 t + K_2)\, e^{-2t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -2K_1 t e^{-2t} + K_1 e^{-2t} - 2K_2 e^{2t}$$

$$f(0) = 1 = K_2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -3 = K_1 - 2K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = (-t + 1)\, e^{-2t}.$$

8.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = -4 \times 1 = -4 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t)$$

$$f(0) = 1 = K_1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2 = K_2 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = \cos(t) + 2\sin(t).$$

9.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t/2}\left(K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \qquad \text{et}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\left(K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\left(-K_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

$$f(0) = 1 = K_1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -1 = -\frac{1}{2}K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad K_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

10.

$$f_p(t) = 0 \qquad ; \qquad \Delta = 2^2 - 4\times 2 = -4 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{2 - \frac{4}{4}} = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t}\left(K_1\cos(t) + K_2\sin(t)\right) \qquad \text{et}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}\left(K_1\cos(t) + K_2\sin(t)\right) + e^{-t}\left(-K_1\sin(t) + K_2\cos(t)\right)$$

$$f(0) = 0 = K_1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 = -K_1 + K_2 \qquad \text{donc}$$

$$K_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 1 \qquad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t}\sin(t).$$

Exercice II.2. Circuit LC et générateur de courant ★ ★

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

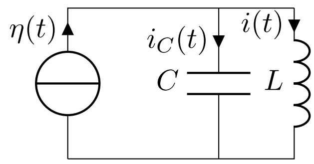


Figure 3.7 – Schéma électrique.

1. **Exprimer** la dérivée temporelle de l'énergie totale, $\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$ en fonction de $i(t)$ et $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$.
   Afin d'obtenir la dérivée temporelle de l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}$, exprimons l'énergie totale dans le circuit LC, elle est telle que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t).$$

En dérivant

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = Cu_C(t)\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

D'après la loi des mailles

$$u_C(t) = -u_L(t).$$

Or d'après la loi de la bobine $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$, il vient donc que

$$u_C(t) = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

On peut ainsi remplacer $u_C(t)$ dans l'expression de la dérivée de l'énergie totale

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L^2C\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

2. **Justifier** qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. Retrouver cette équation par application des lois de l'électronique.
Dans un circuit LC il n'y a pas de résistor, il n'y a donc pas de pertes énergétiques, l'énergie totale du circuit LC reste donc constante. Il vient donc
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 = L^2C\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$
soit en divisant par $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$
$$0 = L^2C\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + Li(t)$$
$$0 = LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + i(t).$$

Tentons de retrouver cette expression en utilisant les lois de l'électronique. D'après la loi des mailles utiliser plus tôt
$$u_C(t) = -u_L(t)$$
en dérivant par rapport au temps
$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t}.$$
D'après la loi du condensateur $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, donc
$$\frac{1}{C}i(t) = -\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t}.$$
D'après la loi de la bobine $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$, donc
$$\frac{1}{C}i(t) = -L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}$$
donc
$$0 = LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + i(t).$$

3. **Établir** les conditions initiales sur $i(t)$ et sa dérivée.
Afin de résoudre cette équation du deuxième ordre, il nous faut deux conditions initiale, concernant $i(t=0)$ et concernant $\mathrm{d}i(t=0)/\mathrm{d}t$.
Lorsque le condensateur est chargé, avant l'instant $t=0$, il agit comme un interrupteur ouvert, aucun courant ne le traverse. Le courant passe entièrement dans la bobine, son intensité fournie par le générateur de courant est I_0. Par continuité de la valeur de l'intensité du courant dans la bobine, il vient que $i(t=0) = I_0$.
En régime permanent, avant l'instant $t=0$, la valeur de l'intensité du courant dans la bobine est constante, ainsi sa dérivée par rapport au temps est nulle, donc $\mathrm{d}i(t=0)/\mathrm{d}t = 0$.
4. **En déduire** l'expression de $i(t)$.
L'équation du deuxième ordre obtenue plus tôt est une équation homogène caractéristique d'un oscillateur harmonique, sa solution est donc
$$i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
avec A et B, deux constantes à déterminer à partir des conditions initiales, et ω_0 la pulsation propre du circuit LC telle que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Il vient que

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

À partir de la condition initiale sur $i(t)$ il vient que

$$i(t=0) = A = I_0.$$

À partir de la condition initiale sur $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ il vient que

$$\left(\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = B\omega_0 = 0$$

$$B = 0.$$

Il vient donc que

$$i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t).$$

Exercice II.3. Circuit bouchon ★ ★

On souhaite déterminer l'équation d'évolution de l'intensité du courant i_2 circulant dans la bobine dans le circuit suivant. Le résistor a une résistance $R = 10$ kΩ, la bobine a une inductance $L = 100$ mH et le condensateur a une capacité $C = 0,1$ µF.

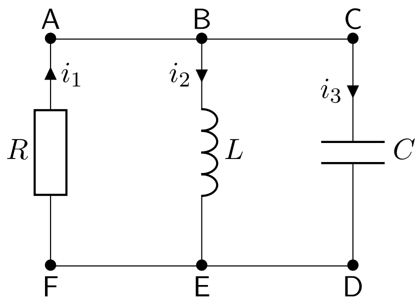


Figure 3.8 – Schéma électrique.

1. **Utiliser** la loi des nœuds pour **établir** une relation entre i_1, i_2 et i_3.
   Au noeud B, on voit que $i_1 = i_2 + i_3$.
2. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABEF pour **établir** une expression de i_1 dépendant de L, R et i_2.
   La loi des mailles dans la maille ABEF donne

$$u_R(t) + u_L(t) = 0 \quad \text{soit} \quad Ri_1(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

   donc

$$i_1(t) = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}.$$

3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille BCDE pour **établir** une expression de u_C, la tension aux bornes du condensateur en fonction de L et i_2.
   La loi des mailles dans la maille BCDE donne

$$u_L(t) - u_C(t) = 0 \quad \text{soit} \quad L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} - u_C(t) = 0$$

donc
$$u_C(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}.$$

4. **Exprimer** i_3 en fonction de u_C, puis i_3 en fonction de L, C et i_2.
D'après la loi du condensateur
$$i_3(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.$$
En utilisant la relation précédente, il vient que
$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}$$
donc
$$C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}$$
soit
$$i_3(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

5. À partir des relations précédentes et de la loi des nœuds, **déterminer** l'équation différentielle que respecte i_2.
D'après la loi des noeuds
$$i_1 = i_2 + i_3.$$
En utilisant les relations précédentes, il vient que
$$-\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = i_2(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}$$
soit
$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + i_2(t) = 0.$$

6. À partir de l'équation canonique impliquant le facteur de qualité Q, **exprimer** la pulsation propre du circuit ω_0 et Q en fonction des paramètres du système. **Donner** les valeurs de Q et ω_0.
L'équation canonique impliquant Q appliquée à l'équation précédente donne
$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 i_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + i_2(t) = 0.$$
Ainsi
$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{soit} \quad Q = \sqrt{LC}\frac{R}{L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$
A.N.
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1\times 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10\times 10^3\,\Omega\sqrt{\frac{0{,}1\times 10^{-6}\,\mathrm{F}}{100\times 10^{-3}\,\mathrm{H}}} = 10$$

7. **Déterminer** à quel type de régime sera soumis ce système. **Donner** l'équation d'évolution de i_2 dans ce régime à partir des conditions initiales suivantes : la charge initiale du condensateur est $q(t=0) = 1\,\mu\text{C}$ et l'intensité initiale du courant la bobine est $i_2(t=0) = 1\,\text{mA}$.
Le facteur de qualité $Q > \frac{1}{2}$ donc le système sera soumis à un régime pseudo-périodique.
Dans ce cas, comme on a affaire à une équation sans second membre

$$i_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

avec $a = \frac{1}{\omega_0^2}$, $b = \frac{1}{Q\omega_0}$, $c = 1$ et $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.
Ainsi

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{Q\omega_0}\frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q}$$
$$\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \omega_0^2\frac{\sqrt{\frac{4}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2\omega_0^2}}}{2} = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}.$$

A.N.

$$\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1\times10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{2\times10} = 500\,\text{s}^{-1}$$
$$\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} = 500\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\times\sqrt{4\times100-1} = 9987\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

À $t=0$

$$i_2(t=0) = A = 1\times10^{-3}\,\text{A}.$$

De plus

$$u_C(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}Le^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ \right) + L\omega e^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)$$

donc

$$q(t) = Cu_C(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}LCe^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ \right) + LC\omega e^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right).$$

À $t=0$

$$q(t=0) = -\frac{\omega_0}{2Q}LC\times1\times10^{-3}\,\text{A} + LC\omega B = 1\times10^{-6}\,\text{C}$$

soit

$$B = \frac{1\times10^{-6}\,\text{C}}{\omega LC} + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\times1\times10^{-3}\,\text{A} = \frac{2Q\times1\times10^{-6}\,\text{C}}{\sqrt{4Q^2-1}}\omega_0 + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\times1\times10^{-3}\,\text{A}.$$

A.N.

$$B = \frac{20\times1\times10^{-6}\,\text{C}}{\sqrt{399}}1\times10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} + \frac{1}{\sqrt{399}}\times1\times10^{-3}\,\text{A} = 5\times10^{-5}\,\text{A}.$$

Finalement

$$i_2(t) = e^{-500\,\text{s}^{-1}\times t}\left(1\times10^{-3}\cos\left(9987\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\times t\right) + 5\times10^{-5}\times\sin\left(9987\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\times t\right)\right)$$

Exercice II.4. Influence d'un condensateur sur un circuit RL ★ ★

Un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne r est branché aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R.

Pour $t<0$ l'interrupteur K est ouvert ; on suppose qu'à $t=0$ le circuit a atteint un régime permanent. On ferme l'interrupteur K à $t=0$ ce qui branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité C.

L'objet de cet exercice est l'étude de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine pour $t>0$.

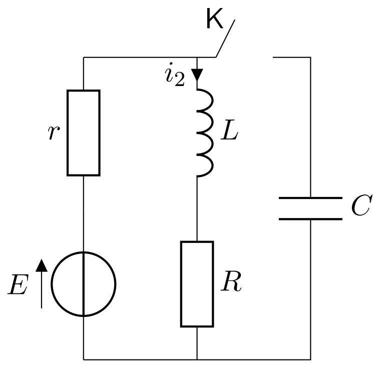


Figure 3.9 – Schéma électrique.

1. **Déterminer** $i(0^+)$ et $\left(\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$.
Avant la fermeture de l'interrupteur l'intensité $i(t)=i_2(t)$. Le régime permanent étant atteint $u_L(t)=0$, et d'après la loi des mailles

$$E=u_r(t=0^-)+u_R(t=0^-)=ri(t=0^-)+ri(t=0^-)$$

donc

$$i(t=0^-)=i_2(t=0^-)=\frac{E}{r+R}.$$

Par continuité de l'intensité dans la bobine à $t=0^+$, il vient que $i(t=0^-)=i_2(t=0^-)=i(t=0^+)=i_2(t=0^+)=\frac{E}{r+R}$.
Avant la fermeture, la tension aux bornes du condensateur est $u_C(t=0^-)=0$, ainsi dans la maille LRC il vient que

$$u_L(t=0^-)+u_R(t=0^-)=u_C(t=0^-)$$

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^-}+Ri_2(t=0^-)=u_C(t=0^-)$$

et par continuité de l'intensité dans la bobune et de la tension aux bornes du condensateur, il vient que

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}+Ri_2(t=0^+)=u_C(t=0^+)$$

$$L\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}+Ri(t=0^+)=0$$

donc

$$\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=-\frac{R}{L}\frac{E}{r+R}.$$

2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$.
On se place $t\geq 0$ et on étudie la maille RLC série. La loi des mailles donne

$$u_L(t)+u_R(t)=u_C(t)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+Ri_2(t)=u_C(t).$$

En dérivant cette relation il vient que

$$L\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C}i_3(t)$$
$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}=i(t)-i_2(t).$$

Pour obtenir $i(t)$ on étudie la maille avec le générateur, r, la bobine et R

$$E=ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+Ri_2(t)$$

donc

$$i(t)=\frac{E}{r}-\frac{R}{r}i_2(t)-\frac{L}{r}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

et ainsi

$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{r}-\frac{R}{r}i_2(t)-\frac{L}{r}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}-i_2(t)$$
$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(RC+\frac{L}{r}\right)\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\left(1+\frac{R}{r}\right)i_2(t)=\frac{E}{r}$$
$$\frac{rLC}{r+R}\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{rRC+L}{r+R}\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+i_2(t)=\frac{E}{r+R}$$

3. On donne $L=43$ mH, $R=9{,}1\ \Omega$, $r=50\ \Omega$ et $E=5{,}0$ V. **Déterminer** les valeurs de C permettant d'observer un régime pseudopériodique.
Pour déterminer la nature du régime on peut étudier la valeur du facteur de qualité Q. En identifiant les coefficients de l'équation différentielle et ceux de l'équation canonique, il vient que

$$\frac{1}{\omega_0^2}=\frac{rLC}{r+R}\quad\text{donc}\quad\omega_0=\sqrt{\frac{r+R}{rLC}}.$$

$$\frac{1}{Q\omega_0}=\frac{rRC+L}{r+R}$$

$$\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{rLC}{r+R}}=\frac{rRC+L}{r+R}\quad\text{soit}\quad\frac{1}{Q}=\frac{rRC+L}{r+R}\sqrt{\frac{r+R}{rLC}}\quad\text{donc}\quad Q=\frac{\sqrt{rRLC+r^2LC}}{rRC+L}$$

Ainsi si $Q>\frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{rRLC+r^2LC}}{rRC+L}>\frac{1}{2}$$

donc

$$\frac{rRLC+r^2LC}{(rRC+L)^2}>\frac{1}{4}$$
$$rRLC+r^2LC>\frac{1}{4}r^2R^2C^2+\frac{1}{4}L^2+\frac{1}{2}rRCL$$
$$-\frac{1}{4}r^2R^2C^2+\left(\frac{1}{2}rRL+r^2L\right)C-\frac{1}{4}L^2>0.$$

On reconnait une équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta = \frac{1}{4}r^2R^2L^2 + r^4L^2 + r^3RL^2 - \frac{1}{4}r^2R^2L^2 = r^3L^2(r+R) > 0.$$

Les deux racines réelles de l'équation sont

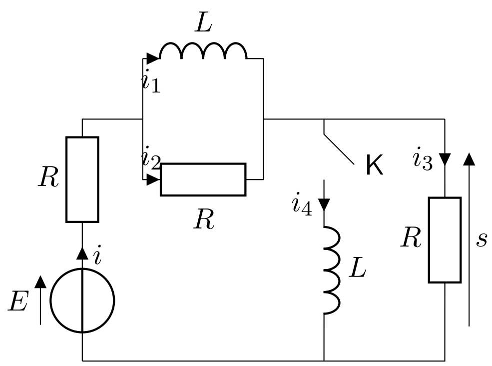
$$C_\pm = \frac{-\frac{1}{2}RL - rL \pm \sqrt{rL^2(r+R)}}{-\frac{1}{2}rR^2} = L\frac{R+2r \mp 2\sqrt{r(r+R)}}{rR^2}.$$

Le coefficient du terme du second ordre étant négatif, les valeurs positives de l'équation sont comprises entre ces deux racines. **A.N.**

$$C_\pm = 43\times10^{-3}\,\mathrm{H}\times\frac{9{,}1\,\Omega + 2\times50\,\Omega \mp 2\sqrt{50\,\Omega\,(50\,\Omega+9{,}1\,\Omega)}}{50\,\Omega\times(9{,}1\,\Omega)^2} = 3{,}9\times10^{-6}\,\mathrm{F} \quad ; \quad 2{,}3\times10^{-3}\,\mathrm{F}.$$

Exercice II.5. Étude d'un circuit à deux bobines ★ ★

On considère le circuit représenté ci-dessous. Le générateur a une force électromotrice constante E. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps et on le ferme à l'instant $t = 0$.



1. **Déterminer** les intensités i, i_1, i_2, i_3 et i_4 à l'instant $t = 0^-$ puis à l'instant $t = 0^+$.
2. **Déterminer** $s(\infty)$, $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$, $i_3(\infty)$ et $i_4(\infty)$, c'est-à-dire les valeurs lorsqu'un régime permanent est atteint.
3. **Relier** $s(t)$ à $i_3(t)$, puis à $i_4(t)$. **En déduire** $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ en fonction de R, L, $s(t)$ et $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$.
4. **Relier** $i_1(t)$ et i_2(t). **En déduire** $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ en fonction de R, L, $i_2(t)$ et $\mathrm{d}i_2(t)/\mathrm{d}t$.
5. **Montrer** que

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_3(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

   En déduire que

$$i_2(t) = \frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{R}s(t).$$

6. **Trouver** une équation différentielle du second odre vérifiée par $s(t)$.
7. **Déterminer** $s(t)$.