# Exercice type

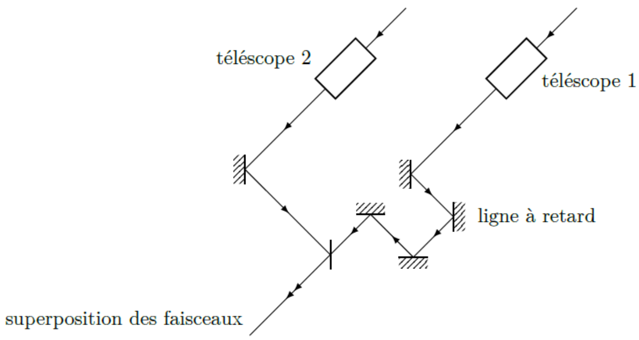
### Chapitre 4 : propagation d'un signal

## Le télescopte interférentiel VLTI

*Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2014)*

Ce sujet traite de l'observation, à l'aide de télescopes, des rayonnements infrarouges provenant de l'espace. Ces rayonnements sont émis par des corps tels que des étoiles jeunes ou des poussières froides. L'observation dans ce domaine de longueurs d'onde se heurte à plusieurs difficultés. D'une part, ces rayonnements sont fortement absorbés par l'atmosphère. D'autre part, l'atmosphère et les instruments de mesure sont également sources de rayonnement infrarouge. On peut s'affranchir du problème de l'atmosphère en embarquant le télescope sur un satellite et de l'émission thermique de l'instrument en refroidissant les différents éléments à l'aide de puissants systèmes cryogéniques. Cependant, les dimensions des télescopes en orbite étant limitées, leur résolution théorique est moins bonne que celle de certains télescopes au sol comme ceux du Very Large Telescope array (VLT) de l'European Southern Observatory à Paranal au Chili qui bénéficient d'un ciel très pauvre en vapeur d'eau et d'une atmosphère très stable.

Pour augmenter la résolution qu'offre un télescope unitaire du VLT on peut faire interférer les signaux optiques reçus par deux télescopes comme cela est illustré Figure 1.




;

Figure 1: Principe du VLTI.

On assimile les deux télescopes distants de $a$ (variable jusqu'à $100\,\mathrm{m}$) à deux trous $T_1$ et $T_2$ de taille négligeable, de sorte que le VLTI sera équivalent au montage de la Figure 2, où la lentille d'axe optique $Oz$, de centre $O$ possède une distance focale $f'$. Le foyer image de la lentille est noté $F'$ et le plan focal est le plan d'observation. $T_1$ et $T_2$ sont à une distance $a/2$ de l'axe optique.

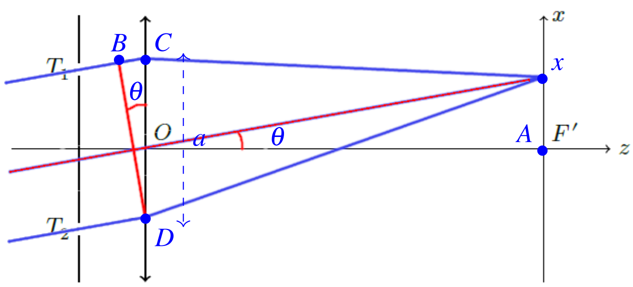



Figure 2: Schéma équivalent du VLTI.

Un unique objet ponctuel à l'infini $A$ est observé dans la direction de l'axe optique. Pour simplifier, on supposera encore que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2{,}00\,\mu\text{m}$.

1. Où se trouve l'image géométrique $A'$ de $A$ à travers la lentille ?

   L'image géométrique de $A$ se trouve **au foyer image principal $F'$.**

2. Calculer la différence de chemin optique $\delta_0$ entres les ondes provenant de $A$ et se recombinant en $A'$, passant par les deux trous $T_1$ et $T_2$ sur la Figure 2.

   L'objet $A$ se trouvant sur l'axe optique et les deux trous $T_1$ et $T_2$ se trouvant à des distances égales de l'axe, **la différence de chemin optique $\delta_0$ est nulle.**

3. En déduire le rôle de la ligne à retard introduite dans le cas de figure décrit par la Figure 1.

   Sur la Figure 1 on voit que les deux faisceau ne prennent pas le même chemin : le faisceau passant par le télescope 2 parcourt une plus grande distance que le télescope 1. **Pour compenser cette différence, on rallonge le chemin du faisceau passant par le télescope 1 à l'aide d'une ligne à retard.**

4. Pour qu'il y ait interférence dans le cas d'ondes lumineuses, on se souvient que le retard entre les deux ondes ne doit pas être plus important que le temps de cohérence $\tau$ de la source de ces ondes. Exprimer en fonction de $\tau$ et d'autres grandeurs la différence de chemins optiques maximale $\delta_{\text{max}}$ pour avoir interférence. Expliquer alors la nécessité de la ligne à retard.

   Pour qu'il y ait interférence, il ne faut pas que les deux ondes présentent un retard entre elles supérieur à $\tau$ la durée de cohérence : durée pendant laquelle la différence de phase entre les rayons est constante. Ainsi la différence de distance parcourue entre les deux faisceaux ne doit pas excéder la distance parcourue durant $\tau$, soit $c\tau$. La différence de chemins optiques maximale est donc

   $$\delta_{\text{max}} = c\tau.$$

   **La ligne à retard assure que la différence de chemin optique est toujours inférieure à cette différence de chemin optique maximale.**

5. On considère que les deux ondes ont une amplitude identique. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_A(x)$ d'un point d'abscisse $x$ dans le plan focal.

   L'intensité $I$ est directement proportionnelle à l'éclairement $\varepsilon$. Ainsi

   $$I_A(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

   avec $I_1(x)$ et $I_2(x)$ les intensités dues aux ondes passant respectivement par $T_1$ et $T_2$, et $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (AT_2x - AT_1x)$ la différence de phase entre les deux ondes issues de $A$, passant par $T_1$ ou $T_2$ et arrivant en $x$.

   À la sortir de la lentille les deux rayons vont parcourir la même distance. La différence de chemin optique se situe en amont de la lentille. En utilisant le triangle rectangle $BCD$, on voit que l'onde 1 parcourt une distance supplémentaire $BC$ telle que

   $$\sin\theta = \frac{BC}{a}$$

   soit, en utilisant l'approximation des petits angles $BC \approx a\theta$.

   On retrouve cet angle $\theta$ dans l'autre triangle rectangle $OAx$ tel que

   $$\tan\theta = \frac{x}{f'}$$

   soit, en utilisant l'approximation des petits angles $\theta \approx \frac{x}{f'}$, et donc

   $$BC \approx \frac{ax}{f'}.$$

   La différence de phase $\Delta\varphi$ est donc telle que

   $$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} n \frac{ax}{f'}.$$

Pour deux ondes d'intensités $I_1$ et $I_2$ identiques, notée $I_0$, il vient que

$$\boxed{I_A(x) = 2I_0(x)\left(1+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}n\frac{ax}{f'}\right)\right).}$$

6. En déduire l'expression de l'interfrange.

Pour obtenir l'interfrange il faut déterminer les positions $x$ pour lesquelles il y interférences constructrices ou destructrices. On choisit d'étudier les interférences constructrices. Elles apparaissent pour

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}n\frac{ax}{f'} = m2\pi$$

avec $m$ un entier relatif. Ainsi les $x_m$ pour lesquels on a interférences constructrices sont

$$x_m = m\frac{\lambda_0 f'}{na}.$$

L'interfrange est la distance entre deux points $x_m$ telle que

$$i = x_{m+1} - x_m = (m+1)\frac{\lambda_0 f'}{na} - m\frac{\lambda_0 f'}{na}$$

soit

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{na}.}$$

7. Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan $(xF'y)$ telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

On observe une alternance de franges sombres et brillantes perpendiculaires à l'axe $(Ox)$ et $(Oz)$, avec une frange brillante en $x = 0$.

8. Un unique objet ponctuel à l'infini $B$ est observé dans la direction $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan $xOy$ avec les mêmes caractéristiques que $A$.

À quelle distance $x_B$ de $F'$ se trouve l'image géométrique de $B$ ? On se place dans les conditions de Gauss $i_B \ll 1$.

L'image $B'$ se trouve sur un foyer image secondaire de la lentille. Cette position est donnée en utilisant le triangle rectangle avec un angle $i_B$ de côté adjacent $f'$ et de côté opposé $x_B$. Ainsi il vient que

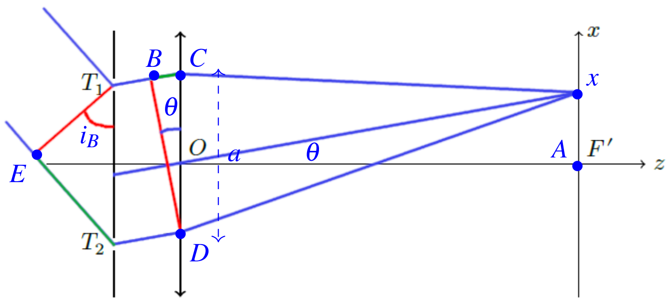
$$\tan i_B = \frac{x_B}{f'}$$

ainsi, en utilisant l'approximation des petits angles

$$\boxed{x_B \approx i_B f'.}$$

9. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_B(x)$ en un point d'abscisse $x$.

On peut reprendre les conclusions obtenues précédemment mais cette fois-ci dans le cas représenté ci-dessous.



L'intensité lumineuse $I_B(x)$ en un point $x$ sera telle que

$$I_B(x) = 2I_0(x)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_B(x)\right)\right)$$

avec $\delta_B(x)$ la différence de chemins optiques dans cette situation à déterminer.

On voit que la distance $ET_2$ s'ajoute au chemin du rayon passant par le trou $T_2$, la différence de parcours entre ce rayon et le rayon passant par le trou $T_1$ est donc

$$ET_2 - BC = ET_2 - \frac{ax}{f'}.$$

La distance $ET_2$ peut être obtenu en se plaçant dans le triangle rectangle $ET_2T_1$, on voit que

$$\sin i_B = \frac{ET_2}{a}$$

soit, dans le cas de l'approximation des petits angles

$$ET_2 = a i_B = \frac{a x_B}{f'}$$

en utilisant l'expression de $x_B$ obtenu plus tôt.

Ainsi

$$ET_2 - BC = \frac{a x_B}{f'} - \frac{ax}{f'} = \frac{a}{f'}(x_B - x)$$

et la différence de chemins optiques $\delta_B(x)$ est telle que

$$\delta_B(x) = n\,(ET_2 - BC) = \frac{na}{f'}(x_B - x)\,.$$

L'intensité lumineuse $I_B(x)$ est donc

$$\boxed{I_B(x) = 2I_0(x)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - x)\right)\right).}$$

10. L'interfrange est-il différent de celui trouvé précédemment ?

Pour obtenir l'interfrange il faut déterminer les positions $x$ pour lesquelles il y interférences constructrices ou destructrices. On choisit d'étudier les interférences constructrices. Elles apparaissent pour

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x - x_B) = m2\pi$$

avec $m$ un entier relatif. Ainsi les $x_m$ pour lesquels on a interférences constructrices sont

$$x_m = x_B + m\frac{\lambda_0 f'}{na}.$$

L'interfrange est la distance entre deux points $x_m$ telle que

$$i = x_{m+1} - x_m = x_B + (m+1)\frac{\lambda_0 f'}{na} - \left(x_B + m\frac{\lambda_0 f'}{na}\right)$$

soit

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{na}.}$$

**L'interfrange est le même.**

11. Deux objets ponctuels à l'infini $A$ et $B$ sont observés dans les directions $i_A = 0$ et $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan $xOz$. Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2{,}00\,\mu\text{m}$ et la même puissance lumineuse.

    **Erreur du rédacteur.**

12. Ces deux sources sont-elles cohérentes ? Justifier la réponse.

    **Ces deux sources ne sont pas cohérentes** car il n'y a aucune raison que les radiations de deux étoiles différentes présentent des phase à l'origine avec des relations particulières : pas de différence constante au cours du temps, et a fortiori pas d'égalité.

13. En déduire l'intensité lumineuse $I_{\text{total}}(x)$ en un point d'abscisse $x$. On mettra cette expression sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

    Comme les sources ne sont pas cohérentes, l'intensité totale est simplement la somme de leur intensités soit

$$\begin{aligned}
I_{\text{total}}(x) &= I_A(x) + I_B(x) \\
&= 2I_0(x)\left(1+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x\right)\right) + 2I_0(x)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - x)\right)\right) \\
&= 2I_0(x)\left(2+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - x)\right)\right).
\end{aligned}$$

    On peut identifier la somme de fonctions sinusoïdales précédentes à la somme de fonctions $\cos(a+b)+\cos(a-b)$, soit en utilisant les identités trigonométriques

$$\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos a\cos b.$$

    On peut identifier $a$ et $b$ tels que

$$\begin{aligned}
a-b &= -\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x \\
a+b &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - x)
\end{aligned}$$

    donc en sommant les deux dernières relations, et en calculant leur différence

$$\begin{aligned}
2a &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - 2x) \\
-2b &= -\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B
\end{aligned}$$

    soit

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - 2x) \\
b &= -\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B.
\end{aligned}$$

    Ainsi

$$\boxed{I_{\text{total}}(x) = 2I_0(x)\left(2+2\cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-2x)\right)\cos\left(-\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B\right)\right).}$$

14. Pour quelle(s) distances(s) $a$ entre les deux télescopes y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de $i_B$.

Il y a brouillage des interférences lorsque le terme d'interférence dans l'expression de l'intensité s'annule. On constate que ce terme s'annule lors la fonction $\cos\left(-\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B\right)$ est égale à 0, soit lorsque

$$\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

avec $m$ un entier relatif. Ainsi les distances $a_m$ pour lesquelles il y a brouillage sont

$$a_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 f'}{nx_B}$$

soit en exprimant $x_B$ en fonction de $i_B$

$$\boxed{a_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 f'}{nf'i_B} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{ni_B}.}$$

15. Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.

L'intensité de deux étoiles doubles observées avec le VLTI correspond à l'expression obtenue plus tôt. Ainsi si on diminue la distance $a$, soit la distance entre les deux télescope on peut obtenir la plus petite valeur $a_m$ avec $m=0$ pour laquelle il y a brouillage, soit disparition des franges d'interférences. Dans ce cas

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{ni_B}$$

on obtient alors l'expression de $i_B$ l'angle entre les deux étoiles $A$ et $B$

$$\boxed{i_B = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{na_0}.}$$

16. Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire $i_m$ du VLTI ?

La valeur maximale de la distance $a$ dans le cas du VLTI est $a_{\text{max}} = 100\,\text{m}$, donc la limite de résolution du VLTI, soit l'angle minimal $i_{B,\text{min}}$ est tel que

$$i_{B,\text{min}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{na_{\text{max}}}.$$

**A.N.**

$$\boxed{i_{B,\text{min}} = \frac{1}{2}\frac{2{,}00\times10^{-6}\,\text{m}}{1\times100\,\text{m}} = 1{,}00\times10^{-8}\,\text{rad} = 5{,}73\times10^{-7\circ} = 2{,}06\times10^{-3\,\prime\prime}.}$$