

DS 3 : signaux

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 4 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$: $f(x) \approx 1 + \alpha x$.
- Identités trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

1 La chasse au péritio

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytions), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 1, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en $x = 0$, P une plaque métallique placée en $x = D = 46\text{cm}$, A une antenne placée en $x = d$ reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle$ du champ électromagnétique émis par E et de valeur $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$ au niveau de l'antenne A.

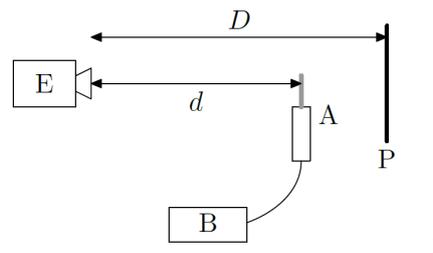
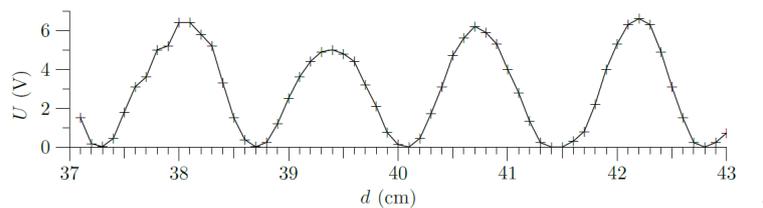


Figure 1: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position $x = d$ entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 2.

Figure 2: Tension U en fonction de la distance $x = d$ entre l'antenne et l'émetteur.

1. Une partie de l'onde est réfléchiée par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchiée vers les x négatifs. Vérifier qu'en $x = D$ l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.
2. L'onde réfléchiée a en réalité une amplitude égale à $-E_0$ et pas E_0 , car la réflexion implique un déphasage de π . Exprimer la valeur du champ électromagnétique total E_{tot} dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.
3. Déterminer la condition sur x pour que E_{tot} s'annule.
4. Déterminer l'écart entre deux position x consécutives pour lesquelles E_{tot} s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 2 la valeur de la fréquence f de l'onde électromagnétique.
5. Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1 \text{ GHz}$, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6 \text{ GHz}$. Déterminer l'incertitude sur votre valeur de f obtenue plus tôt et comparer votre mesure avec la fréquence annoncée par le constructeur à l'aide de l'outil adapté.

2 Potentiel d'action

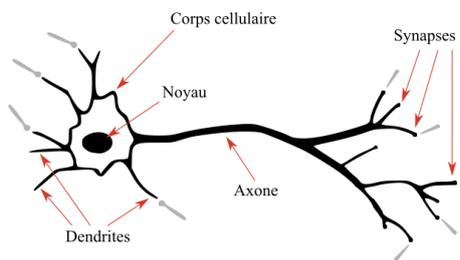
Adapté du concours Banque G2E - BCPST (2019)

Le fond de l'oeil est tapissé par la rétine, membrane très fragile, jaunâtre et transparente. C'est la partie sensible de l'oeil. Cette sensibilité est due à deux sortes de cellules :

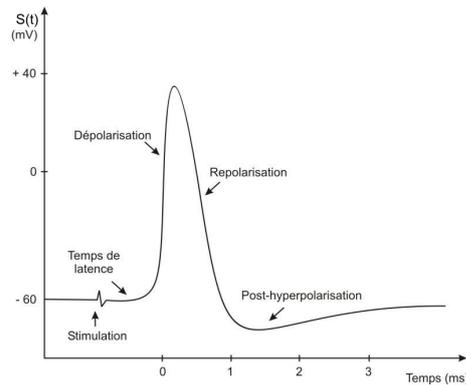
- Les bâtonnets : comme leur nom l'indique, ces cellules ont une forme allongée. Ils sont colorés en rose par le pourpre rétinien qui les rend sensibles à la lumière. Ils ne sont pas sensibles à la couleur et travaillent essentiellement en vision crépusculaire. On compte environ 120 millions de bâtonnets dans la rétine humaine.
- Les cônes : ce sont les seuls à être sensibles à la couleur. Ils participent essentiellement à la vision diurne.

Les cellules de la rétine transforment le signal lumineux en signal électrique, qui se propage ensuite vers le cerveau via les neurones. Comme le montre la Figure 3a, la propagation de l'information a principalement lieu dans l'axone. Elle est transmise aux neurones voisins via les dendrites et synapses.

Lorsque les cônes et bâtonnets sont stimulés, un signal électrique correspond à la différence de potentiel électrique entre l'intérieur et l'extérieur de l'axone, appelé potentiel d'action, se propage dans le nerf optique. Son profil temporel en un point donné de l'axone est donné par la Figure 3b.



(a) Schéma d'un neurone.



(b) Évolution du potentiel d'action $S = V_{int} - V_{ext}$ en fonction du temps lors de la stimulation d'un neurone. La stimulation provoque l'ouverture de canaux à sodium : les parois deviennent fortement perméables au sodium pendant un court instant, ce qui entraîne la polarisation. La diffusion des ions potassium et les pompes sodium-potassium permettent un retour au potentiel d'équilibre (repolarisation).

Figure 3: Schéma d'un neurone et profil temporel du potentiel d'action en un point de l'axone.

On cherche à reproduire ce signal à l'aide du matériel d'électricité disponible au laboratoire. Un circuit qui peut convenir est présenté sur la Figure 4.

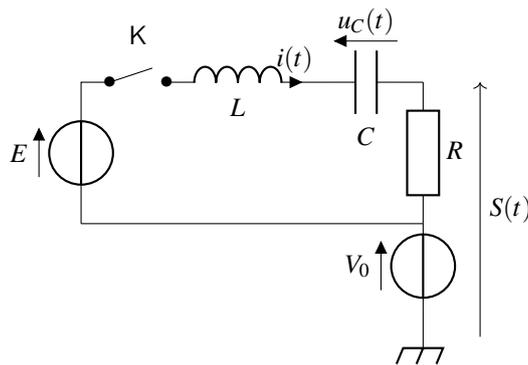


Figure 4: Schéma du circuit électrique

6. À partir de la Figure 3b, lire la valeur de repos S_0 , la valeur maximale S_{max} , la valeur minimale S_{min} de ce signal et sa durée caractéristique τ .
7. On étudie le circuit présenté Figure 4. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et le régime est permanent. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Pour $t < 0$, quelles sont les valeurs de i , u_C et S ? En déduire la valeur de V_0 à choisir pour que $S(t < 0) = S_0$.
8. Exprimer les valeurs de i , u_C et S à l'instant $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur.
9. Donner la relation entre $i(t)$, $S(t)$, V_0 et R . Donner la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$.
10. Écrire la loi des mailles et en déduire l'équation du deuxième ordre vérifiée par $S(t)$.
11. Mettre cette équation sous la forme canonique impliquant le facteur de qualité Q . Identifier et exprimer la pulsation ω_0 et Q en fonction de R , L et C .
12. Donner la forme générale de la solution $S(t)$ pour $Q > \frac{1}{2}$.
13. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration est nulle.
14. Écrire la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et en déduire l'expression de $\frac{dS(0^+)}{dt}$. Exprimer alors la deuxième constante d'intégration en fonction de ω , E et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$.

3 Influence d'un condensateur sur un circuit RL

Un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne r est branché aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R .

Pour $t < 0$ l'interrupteur K est ouvert ; on suppose qu'à $t = 0$ le circuit a atteint un régime permanent. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$ ce qui branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité C .

L'objet de cet exercice est l'étude de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine pour $t > 0$.

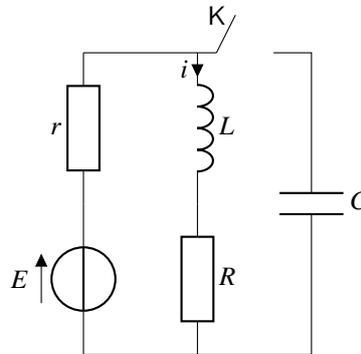


Figure 5: Schéma électrique.

15. Déterminer $i(0^+)$ et $\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_{t=0}$.
16. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
17. On donne $L = 43 \text{ mH}$, $R = 9,1 \Omega$, $r = 50 \Omega$ et $E = 5,0 \text{ V}$. Déterminer les valeurs de C permettant d'observer un régime pseudopériodique.

4 Phénomènes d'interférences

18. Déterminer les conditions pour que l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux ondes de même fréquence soit nulle.
 - 7
19. Deux ondes sonores de mêmes amplitude A interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'amplitude total.
20. Deux ondes lumineuses de même éclairement \mathcal{E} interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'éclairement total.
21. Deux ondes lumineuses de même éclairement \mathcal{E} interfèrent. Déterminer la valeur du déphasage lorsque l'éclairement total est à \mathcal{E} . En déduire la différence de chemin optique.
22. Déterminer l'ordre des franges brillantes visibles sur la Figure 6.

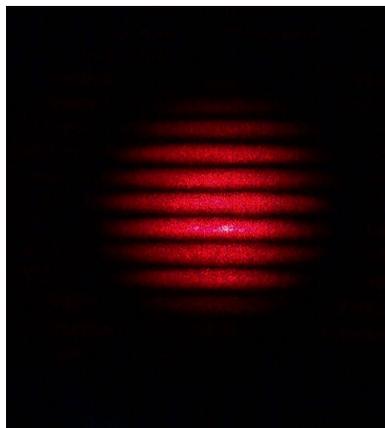


Figure 6: Figure d'interférence produite par les trous d'Young¹.

23. Un dispositif de trous d'Young est installé de telle manière que la différence de marche entre les deux ondes lumineuses varient entre $-3 \mu\text{m}$ et $3 \mu\text{m}$ sur la zone éclairée de l'écran, zone qu'on appelle champ d'interférence. La longueur d'onde des deux ondes est $\lambda = 532 \text{ nm}$. Déterminer le nombre de franges brillantes et le nombre de franges sombres.
24. Schématiser une expérience de trous d'Young pour laquelle la distance entre les trous et un écran est égale à D et les trous sont orientés selon un axe (Ox') . Retrouver l'expression de la différence de chemin optique entre deux ondes $\delta = \frac{mx}{D}$.
25. À partir de l'expression de la différence de chemin optique précédente, en déduire l'expression de l'interfrange i .
26. On constate que les franges de la figure d'interférence obtenue dans une expérience de trous d'Young sont trop serrées. Déterminer comment déplacer l'écran pour y remédier.
27. La Figure 6 a été obtenue à l'aide d'un capteur CCD rectangulaire avec une longueur de $4,4 \text{ mm}$, une largeur de $4,0 \text{ mm}$ et comportant $9,0 \cdot 10^6$ pixels carrés. Déterminer la valeur du côté l d'un pixel.
En déduire la valeur de l'interfrange i à partir de la Figure 6.
28. En déduire la valeur de la distance D entre le capteur et les trous sachant que $\lambda = 633 \text{ nm}$ et $a = 1,5 \text{ mm}$.

¹Source : [site de François Legrand](#).