DS 4 : bilan semestre 1

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 3 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$: $f(x) \approx 1 + \alpha x$.
- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques : $\cos\alpha \approx 1$; $\sin\alpha \approx \alpha$; $\tan\alpha \approx \alpha$.
- Identités trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b.
\end{aligned}
$$

---

1 Potentiel d'action

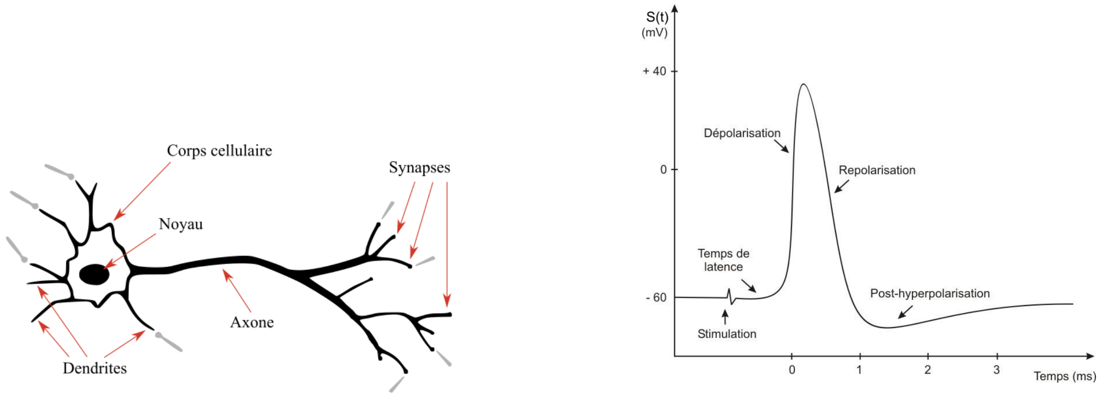
Adapté du concours Banque G2E - BCPST (2019)

Le fond de l'oeil est tapissé par la rétine, membrane très fragile, jaunâtre et transparente. C'est la partie sensible de l'oeil. Cette sensibilité est due à deux sortes de cellules :

- Les bâtonnets : comme leur nom l'indique, ces cellules ont une forme allongée. Ils sont colorés en rose par le pourpre rétinien qui les rend sensibles à la lumière. Ils ne sont pas sensibles à la couleur et travaillent essentiellement en vision crépusculaire. On compte environ 120 millions de bâtonnets dans la rétine humaine.
- Les cônes : ce sont les seuls à être sensibles à la couleur. Ils participent essentiellement à la vision diurne.

Les cellules de la rétine transforment le signal lumineux en signal électrique, qui se propage ensuite vers le cerveau via les neurones. Comme le montre la Figure 1a, la propagation de l'information a principalement lieu dans l'axone. Elle est transmise aux neurones voisins via les dendrites et synapses.

Lorsque les cônes et bâtonnets sont stimulées, un signal électrique correspond à la différence de potentiel électrique entre l'intérieur et l'extérieur de l'axone, appelé potentiel d'action, se propage dans le nerf optique. Son profil temporel en un point donné de l'axone est donné par la Figure 1b.



(a) Schéma d'un neurone.

(b) Évolution du potentiel d'action $S = V_{int} - V_{ext}$ en fonction du temps lors de la stimulation d'un neurone. La stimulation provoque l'ouverture de canaux à sodium : les parois deviennent fortement perméables au sodium pendant un court instant, ce qui entraine la polarisation. La diffusion des ions potassium et les pompes sodium-potassium permettent un retour au potentiel d'équilibre (repolarisation).

Figure 1: Schéma d'un neurone et profil temporel du potentiel d'action en un point de l'axone.

On cherche à reproduire ce signal à l'aide du matériel d'électricité disponible au laboratoire. Un circuit qui peut convenir est présenté sur la Figure 2.

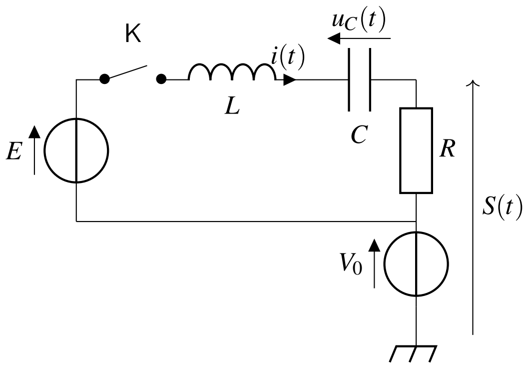


Figure 2: Schéma du circuit électrique

1. À partir de la Figure 1b, lire la valeur de repos S_0, la valeur maximale S_{max}, la valeur minimale S_{min} de ce signal et sa durée caractéristique τ.

   D'après la figure

$$S_0 = -60 \text{ mV}$$
$$S_{max} \approx 37 \text{ mV}$$
$$S_{min} \approx -67 \text{ mV}$$
$$\tau \approx 1 \text{ ms.}$$

2. On étudie le circuit présenté Figure 2. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et le régime est permanent. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Pour $t < 0$, quelles sont les valeurs de i, u_C et S ? En déduire la valeur de V_0 à choisir pour que $S(t < 0) = S_0$.

   Pour $t < 0$ l'interrupteur est ouvert donc l'intensité du courant dans le circuit est nul $i(t < 0) = 0$ et la tension aux bornes du condensateur est aussi nulle car il est déchargé $u_C(t < 0) = 0$. La tension $S(t < 0)$ est d'après l'expression des tension en terme de potentiel

$$S(t<0) = u_R(t<0) + V_0$$
$$S(t<0) = Ri(t<0) + V_0$$
$$S(t<0) = V_0$$

Ainsi pour que $S(t<0) = S_0$ il faut imposer une valeur $V_0 = S_0 = -60$ mV.

3. Exprimer les valeurs de i, u_C et S à l'instant $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur.

   Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine, $i(t=0^+) = 0$.

   Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t=0^+) = 0$.

   Ainsi

$$S(t=0^+) = u_R(t=0^+) + V_0$$
$$S(t=0^+) = Ri(t=0^+) + V_0$$
$$S(t=0^+) = V_0.$$

4. Donner la relation entre $i(t)$, $S(t)$, V_0 et R. Donner la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$.

   La tension $S(t)$ est telle que

$$\boxed{S(t) = Ri(t) + V_0.}$$

   D'après la loi du condensateur

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.}$$

5. Écrire la loi des mailles et en déduire l'équation du deuxième ordre vérifiée par $S(t)$.

   D'après la loi des mailles

$$E = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t).$$

   On veut faire apparaître l'équation différentielle que respecte $S(t)$, or $S(t) = Ri(t) + V_0$, il faut donc commencer par obtenir l'équation différentielle pour $i(t)$, soit

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + i(t) + C\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}.$$

   On peut alors multiplier l'équation par R et ajouter V_0 pour faire apparaître l'équation différentielle que respecte $S(t)$

$$0 = RLC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + Ri(t) + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 Ri(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + V_0.$$

Comme V_0 est constant on voit que

$$\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Ri(t)+V_0}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2Ri(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2Ri(t)+V_0}{\mathrm{d}t^2}$$

ainsi

$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2Ri(t)+V_0}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t)+V_0}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + V_0$$

$$\boxed{V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2S(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + S(t).}$$

6. Mettre cette équation sous la forme canonique impliquant le facteur de qualité Q. Identifier et exprimer la pulsation ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

La forme canonique impliquant le facteur de qualité Q d'une équation différentielle du deuxième ordre est

$$E = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2S(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + S(t).$$

On peut alors identifier la pulsation ω_0 et le facteur de qualité Q en comparant les deux dernières équations. Il vient

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et

$$\frac{1}{Q\omega_0} = RC$$
$$\frac{1}{Q}\sqrt{LC} = RC$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

7. Donner la forme générale de la solution $S(t)$ pour $Q > \frac{1}{2}$.

La solution générale est de la forme

$$S(t) = S_p + S_h(t)$$

avec S_p et $S_h(t)$ les solutions particulière et homogène.

La solution particulière S_p est telle que

$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2S_p}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}S_p}{\mathrm{d}t} + S_p = S_p.$$

Comme $Q > \frac{1}{2}$, le système est en régime pseudopériodique et la solution homogène est de la forme

$$S_h(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

avec $\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$.
Donc la solution générale est telle que

$$\boxed{S(t) = V_0 + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)\right).}$$

8. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration est nulle.
On sait qu'à $t = 0^+$ $S(t=0^+) = V_0$ or

$$S(t=0^+) = e^0\left(A\cos\left(0\right) + B\sin\left(0\right)\right) + V_0$$

$$S(t=0^+) = A + V_0$$

donc

$$A + V_0 = V_0$$

soit

$$\boxed{A = 0.}$$

Il vient donc que

$$S(t) = Be^{-t/\tau}\sin\left(\omega t\right) + V_0.$$

9. Écrire la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et en déduire l'expression de $\frac{\mathrm{d}S(0^+)}{\mathrm{d}t}$. Exprimer alors la deuxième constante d'intégration en fonction de ω, E et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$.
À $t = 0^+$ la loi des mailles donne

$$E = u_L(t=0^+) + u_C(t=0^+) + u_R(t=0^+)$$

$$E = L\frac{\mathrm{d}i(t=0^+)}{\mathrm{d}t} + u_C(t=0^+) + Ri(t=0^+)$$

$$E = L\frac{\mathrm{d}i(t=0^+)}{\mathrm{d}t} + 0 + 0$$

en multipliant par R

$$RE = L\frac{\mathrm{d}Ri(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

or on a montré que

$$\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$RE = L\frac{\mathrm{d}Ri(t=0^+) + V_0}{\mathrm{d}t}$$

$$RE = L\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{RE}{L}.}$$

Si on dérive l'expression de $S(t)$ obtenue plus tôt

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Be^{-t/\tau}\sin\left(\omega t\right) + V_0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t) + \omega B e^{-t/\tau}\cos(\omega t).$$

À $t = 0^+$

$$\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B}{\tau}e^{0}\sin(0) + \omega B e^{0}\cos(0)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = \omega B$$

donc

$$B = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

or on a montré que $\mathrm{d}S(t=0^+)/\mathrm{d}t = RE/L$ donc

$$B = \frac{1}{\omega}\frac{RE}{L}$$

or

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = 2\frac{L}{R}$$

donc

$$\boxed{B = \frac{2E}{\omega\tau}.}$$

2 Fibre optique - Approche géométrique

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2011)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la Figure 3 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n. Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ.

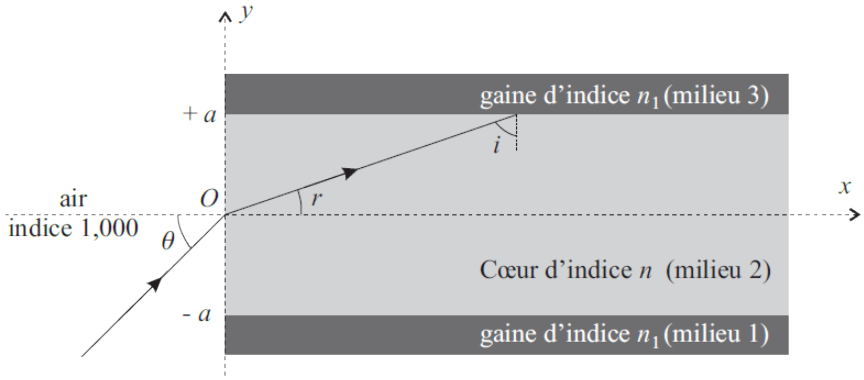


Figure 3: Fibre optique en coupe.

10. Les différents angles utiles sont représentés sur la Figure 3. À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_l l'angle d'incidence limite.

    Le rayon reste confiné à l'intérieur du cœur si **la réflexion à l'interface cœur-gaine est totale**. C'est le cas lorsque l'angle d'incidence i est supérieur à l'angle d'incidence limite i_l correspondant à un rayon émergent rasant, soit un rayon émergent avec un angle de réfraction $i_2 = \pi/2$, soit d'après la loi de la réfraction

$$n \sin i_l = n_1 \sin\frac{\pi}{2}$$

$$n \sin i_l = n_1.$$

La condition de confinement est donc

$$\boxed{i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right).}$$

11. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_l. En déduire l'expression de l'ouverture numérique $O.N. = \sin\theta_l$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.

θ étant l'angle d'incidence sur le dioptre air-cœur en entrée de fibre, l'angle de réfraction des rayons est donné par la loi de la réfraction

$$\sin\theta = n \sin r$$

or $r + i + \frac{\pi}{2} = \pi$, soit $r = \frac{\pi}{2} - i$, donc

$$\sin\theta = n\cos i.$$

Or $i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$, si on applique la fonction cos sur cette inégalité, comme cette fonction est décroissante entre 0 et $\pi/2$ l'inégalité change de signe

$$\cos i < \cos\left[\arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)\right].$$

On peut exprimer le cosinus en fonction du sinus : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, soit

$$\cos i < \sqrt{1-\sin^2\left[\arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)\right]}$$

$$\cos i < \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}$$

$$n\cos i < n\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}$$

$$\sin\theta < \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

$$\theta < \arcsin\left(\sqrt{n^2-n_1^2}\right).$$

L'angle d'incidence θ doit être inférieur à l'angle θ_l tel que $\boxed{\sin\theta_l = n\cos i_l = \sqrt{n^2-n_1^2}}$**.**

L'expression de l'ouverture numérique de la fibre $O.N.$ est donc

$$O.N. = \sin\theta_l$$

$$\boxed{O.N. = \sqrt{n^2-n_1^2}.}$$

12. Donner la valeur numérique de $O.N.$ pour $n = 1,50$ et $n_1 = 1,47$.

A.N.

$$O.N. = \sqrt{1,50^2 - 1,47^2}$$

$$\boxed{O.N. = 0,298.}$$

On considère une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_l. On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

13. Pour quelles valeurs de l'angle θ, le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal et maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L, c, n et n_1.

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est minimal lorsque le rayon lumineux est parallèle à l 'axe optique. Le temps de parcours t_{min} est donc

$$\boxed{t_{min} = \frac{L}{c_n} = n\frac{L}{c}}$$

avec L la longueur de la fibre et c_n la célérité du rayon dans le cœur de la fibre d'indice n.

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est maximal lorsque le rayon lumineux entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ_l. Ce rayon arrive sur l'interface cœur-gaine avec un angle i_{lim}. Lorsque ce rayon parcours une distance d_{max}, le rayon du parcours minimal parcours une distance d_{min}. Ces deux distances sont liée à l'angle i_{lim} telles que

$$\sin i_{lim} = \frac{d_{min}}{d_{max}}$$

soit

$$\frac{n_1}{n} = \frac{d_{min}}{d_{max}}.$$

Le parcours maximal sera donc toujours lié au parcours minimal par la relation

$$d_{max} = \frac{n}{n_1} d_{min}.$$

On peut donc obtenir le temps de parcours maximal t_{max}

$$t_{max} = \frac{n}{n_1}\frac{d_{min}}{c_n}$$

$$\boxed{t_{max} = \frac{n^2}{n_1}\frac{L}{c}.}$$

L'intervalle de temps δt est donc

$$\delta t = t_{max} - t_{min}$$

$$\delta t = \frac{n^2}{n_1}\frac{L}{c} - n\frac{L}{c}$$

$$\boxed{\delta t = n\frac{L}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right).}$$

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_l. La Figure 4 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t.

14. Reproduire la Figure 4 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

La durée caractéristique de l'impulsion lumineuse t_0' en sortie est

$$\boxed{t_0' = t_0 + \delta t.}$$

Le codage binaire de l'information consiste a envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F.

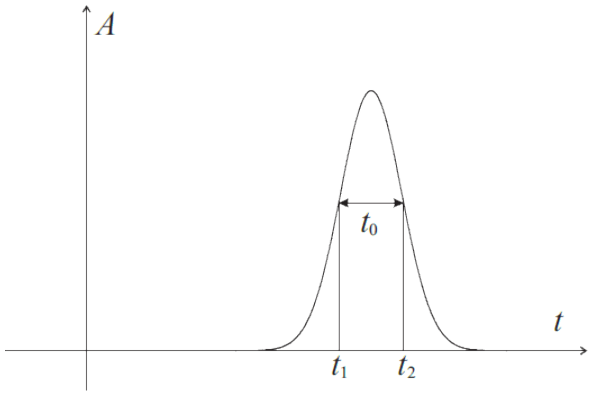


Figure 4: Impulsion lumineuse.

15. En supposant t_0 négligeable devant δt, quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

    Pour que les impulsions ne se recouvrent pas à la sortie de la fibre optique, il faut que la durée des impulsions en sortie de la fibre soit être plus courte que le délai entre deux impulsions successives. Ce délai correspond à la période T d'émission des impulsions telle que $T = 1/F$.

    Il faut donc que

    $$t_0' < T$$

    $$t_0 + \delta t < T$$

    soit, pour une durée d'impulsion d'entrée t_0 négligeable devant δt

    $$\delta t < T$$

    soit

    $$n\frac{L}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) < \frac{1}{F}$$

    ou

    $$F < \frac{c}{nL}\frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

    $$\boxed{Fn\frac{L}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) < 1.}$$

    Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{max} \cdot F$.

16. Exprimer la bande passante B en fonction de c, n et n_1.

    La longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions correspond à la condition limite pour laquelle il n'y a pas recouvrement soit

    $$Fn\frac{L_{max}}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) = 1$$

    soit

    $$F = \frac{c}{nL_{max}}\frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

    La bande passant B est alors

    $$B = L_{max} \cdot F$$

$$B = L_{max}\frac{c}{nL_{max}}\frac{1}{\frac{n}{n_1}-1}$$

$$\boxed{B = \frac{c}{n}\frac{1}{\frac{n}{n_1}-1}.}$$

17. Calculer la valeur numérique de la bande passante B (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 12. Pour un débit d'information de $F = 100$ Mbits.s$^{-1} = 100$ MHz, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de L_{max} obtenue.

A.N.

$$B = \frac{3.10^8\ \text{m.s}^{-1}}{1,50}\frac{1}{\frac{1,50}{1,47}-1}$$

$$B = 9,80.10^9\ \text{m.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6\ \text{km.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6\ \text{Hz.km}$$

$$\boxed{B = 9,80\ \text{MHz.km.}}$$

Avec cette bande passante B et ce débit d'information F, on peut exprimer la longueur maximale de fibre optique L_{max} à partir de la relation

$$B = L_{max} \cdot F$$

soit

$$L_{max} = \frac{B}{F}.$$

A.N.

$$L_{max} = \frac{9,80\ \text{MHz.km}}{100\ \text{MHz}}$$

$$L_{max} = 9,80.10^{-2}\ \text{km}$$

$$\boxed{L_{max} = 98,0\ \text{m.}}$$

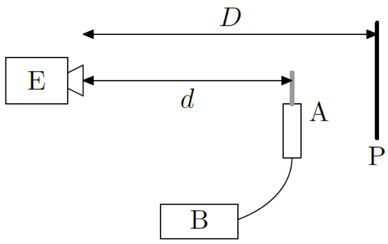
D'après la valeur obtenue pour la longueur maximale de la fibre optique étudiée, on peut utiliser cette dernière pour des transferts de données informatiques dans un bâtiment, mais pas pour des grandes distances.

3 La chasse au péritio

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytons), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

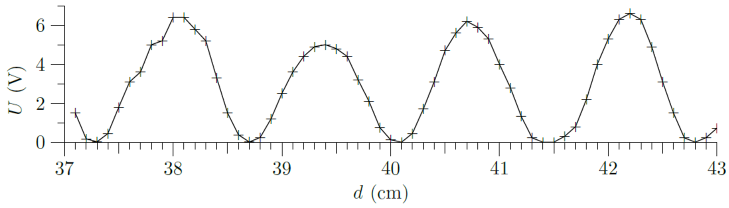
On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 5, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en $x = 0$, P une plaque métallique placé en $x = D = 46\,\text{cm}$, A une antenne placée en $x = d$ reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle$ du champ électromagnétique émis par E et de valeur $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$ au niveau de l'antenne A.



;

Figure 5: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position $x = d$ entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 6.



;

Figure 6: Tension U en fonction de la distance $x = d$ entre l'antenne et l'émetteur.

18. Une partie de l'onde est réfléchie par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchie vers les x négatifs. Vérifier qu'en $x = D$ l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.

Pour répondre à cette question on pouvait soit déterminer le retard de l'onde réfléchie par rapport à la source, soit utiliser la démonstration du cours.

Si on essaye de déterminer l'expression de l'onde réfléchie rapidement, on sait que c'est une onde qui se propage selon les x négatifs, son expression doit donc être

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega(t-\tau) + kx)$$

avec τ le retard de l'onde réfléchie par rapport à une onde émise depuis la source. Pour déterminer ce retard, il faut déterminer le trajet effectué par l'onde avant de repasser par la source : l'onde réfléchie a d'abord été émise à la source, en $x = 0$ (ou $d = 0$), puis a parcouru une distance D vers les x négatifs avant d'être réfléchie vers les x positifs, et enfin, a parcouru une nouvelle distance D pour revenir jusqu'à la source. La distance parcourue par l'onde est donc de $2D$, et son retard est donc $\tau = 2D/c$, ainsi

$$E(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{2D}{c}\right) + kx\right)$$

$$E(x,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} 2D + kx\right)$$

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k2D + kx)$$

$$\boxed{E(x,t) = E_0 \cos(\omega t + k(x-2D)).}$$

Si on essaye d'utiliser la démonstration du cours. À t_0 le signal part de $x_0 = 0$ et se propage vers les x positifs jusqu'à $x_1 = D$ à $t_1 > t_0$. La relation entre t_0 et t_1 est

$$t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{c} = t_0 + \frac{D}{c}.$$

À t_1 le signal part de $x_1 = D$ et se propage vers les x négatifs jusqu'à $x_2 < D$ à $t_2 > t_1$. La relation entre t_1 et t_2 est

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1 - x_2}{c} = t_1 + \frac{D - x_2}{c}$$

car $D-x_2>0$. On obtient donc la relation entre t_0 et t_2

$$t_2 = t_0 + \frac{D}{c} + \frac{D-x_2}{c} = t_0 - \frac{x_2-2D}{c}$$

donc

$$t_0 = t_2 + \frac{x_2-2D}{c}.$$

On connaît l'expression du signal à t_0 lorsque l'onde est émise au niveau de la source en $x_0=0$

$$E(x_0,t_0) = E_0\cos(\omega t_0 + kx_0) = E_0\cos(\omega t_0) = E(t_0).$$

On voit qu'en x_0 le signal n'est que fonction du temps. Pour obtenir l'expression du signal en t_2 on tient compte du retard de ce signal en utilisant l'expression précédente mais pour laquelle on a exprimé t_0 en fonction de t_2.

$$E(t_0) = E(t_2 + \frac{x_2-2D}{c})$$
$$E_0\cos(\omega t_0) = E_0\cos\left(\omega\left(t_2+\frac{x_2-2D}{c}\right)\right)$$

donc

$$E(x_2,t_2) = E_0\cos\left(\omega\left(t_2+\frac{x_2-2D}{c}\right)\right) = E_0\cos(\omega t_2 + k(x_2-2D)).$$

Cela est vrai pour tout signaux mesuré en x à l'instant associé t, donc le signal réfléchi est tel que

$$\boxed{E(x,t) = E_0\cos(\omega t + k(x-2D)).}$$

Pour $x=D$ on voit que le signal est

$$\boxed{E(x=D,t) = E_0\cos(\omega t + k(D-2D)) = E_0\cos(\omega t - kD).}$$

On constate qu'on a bien affaire à l'expression du signal se propageant vers les x positifs en $x=D$.

19. L'onde réfléchie a en réalité une amplitude égale à $-E_0$ et pas E_0, car la réflexion implique un déphasage de π. Exprimer la valeur du champ électromagnétique total E_{tot} dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

L'onde réfléchie en x a donc un signal tel que

$$E(x,t) = -E_0\cos(\omega t + k(x-2D)).$$

En la sommant avec le signal de l'onde progressive $E(x,t)=E_0\cos(\omega t - kx)$, il vient que

$$E_{\text{tot}} = E_0\cos(\omega t - kx) - E_0\cos(\omega t + k(x-2D))$$
$$E_{\text{tot}} = E_0\left(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x-2D))\right).$$

On reconnaît une expression de la forme $\cos(a-b)-\cos(a+b)$ avec

$$a-b = \omega t - kx$$
$$a+b = \omega t + k(x-2D)$$

donc en sommant les deux dernières relations, et en calculant leur différence

$$2a = 2\omega t - 2kD$$
$$-2b = -2kx + 2kD$$

soit

$$a = \omega t - kD$$
$$b = k(x - D).$$

En utilisant les identités trigonométriques, il peut voir que $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$ donc

$$E_{\text{tot}} = E_0 \left(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x - 2D))\right)$$

$$\boxed{E_{\text{tot}} = 2E_0 \left(\sin(\omega t - kD)\sin(k(x - D))\right).}$$

20. Déterminer la condition sur x pour que E_{tot} s'annule. On voit, grâce à l'expression prédédente que E_{tot} s'annule pour des valeurs de x telles que $\sin(k(x-D)) = 0$, soit

$$k(x - D) = m\pi$$

avec m un entier relatif. soit

$$x_m = m\pi\frac{1}{k} + D = x = m\pi\frac{\lambda}{2\pi} + D$$

$$\boxed{x_m = m\frac{\lambda}{2} + D}$$

avec x_m les valeurs de x pour lesquelles E_{tot} s'annule.

21. Déterminer l'écart entre deux position x consécutives pour lesquelles E_{tot} s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 6 la valeur de la fréquence f de l'onde électromagnétique. Si on prend les positions x_{m+1} et x_m, la différence de ces positions est

$$x_{m+1} - x_m = (m+1)\frac{\lambda}{2} + D - \left(m\frac{\lambda}{2} + D\right)$$

$$\boxed{x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2}.}$$

D'après la Figure 6 on voit que l'écart moyen entre deux annulations de la tension, donc annulation de E_{tot} est $\frac{x_{m+4} - x_m}{4} = \frac{42{,}8\,\text{cm} - 37{,}3\,\text{cm}}{4} = 1{,}375\,\text{cm}$. L'incertitude $u(x_{m+4} - x_m) = \frac{u(x_m)}{4\sqrt{3}} = \frac{0{,}1\,\text{cm}}{4\sqrt{3}} = 0{,}01\,\text{cm}$. Ainsi

$$x_{m+1} - x_m = (1{,}38 \pm 0{,}01\,\text{cm}).$$

Donc

$$\lambda = 2(x_{m+1} - x_m) \pm 2u(x_{m+1} - x_m) = (2{,}76 \pm 0{,}02)\,\text{cm}$$

$$\boxed{f = \frac{c}{\lambda} \pm \frac{c}{\lambda^2}u(\lambda) = (10{,}9\,\text{GHz} \pm 0{,}08\,\text{GHz}).}$$

22. Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1{,}1\,\text{GHz}$, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1.1}{\sqrt{3}} = 0{,}6\,\text{GHz}$. Déterminer l'incertitude sur votre valeur de f obtenue plus tôt et comparer votre mesurer avec la fréquence annoncée par le constructeur à l'aide de l'outil adapté. On a obtenu l'incertitude plus tôt. Pour comparer notre valeur à celle du constructeur on peut utiliser le Z-score.

$$Z = \frac{|f - f_{\text{cons}}|}{\sqrt{u^2(f) + u^2(f_{\text{const}})}}.$$

A.N.

$$Z = \frac{|10{,}9 - 11|}{\sqrt{(0{,}08)^2 + (0{,}6)^2}} = 0{,}17.$$

Le Z-score est inférieur à 2, **les deux valeurs sont compatibles**.