DS 5 - Mécanique du point

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 2 parties **indépendantes**.
- **Les calculatrices sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- $\ln\left(\frac{8{,}95}{8{,}02}\right) = 0{,}11$.

---

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ (avec $g = 9{,}81$ m.s^{-2}), $\overrightarrow{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

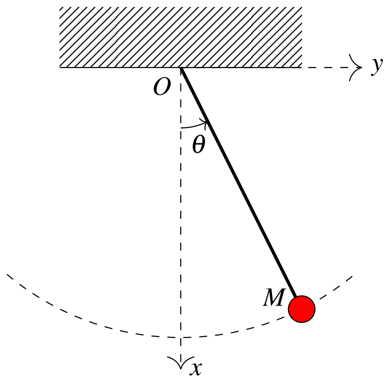

Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.
3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.

   En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.
4. On ne considère plus que les élongations sont faibles. On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $\dot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$. Montrer, en multipliant cette équation par $\dot{\theta}$, que la vitesse angulaire du pendule peut se mettre sous la forme

$$\dot{\theta}^2(t) = \pm\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta(t) - \cos\theta_0\right)}.$$

5. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

   On ne demande pas de calculer cette intégrale.

   Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

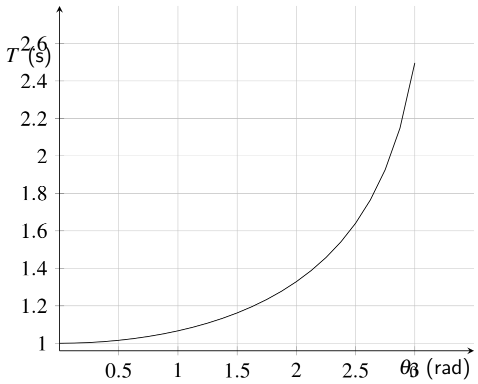

Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0.

6. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du point M et α, une constante positive.

7. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.

   En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

8. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

   Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

9. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

   Exprimer δ en fonction de T et τ.

10. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

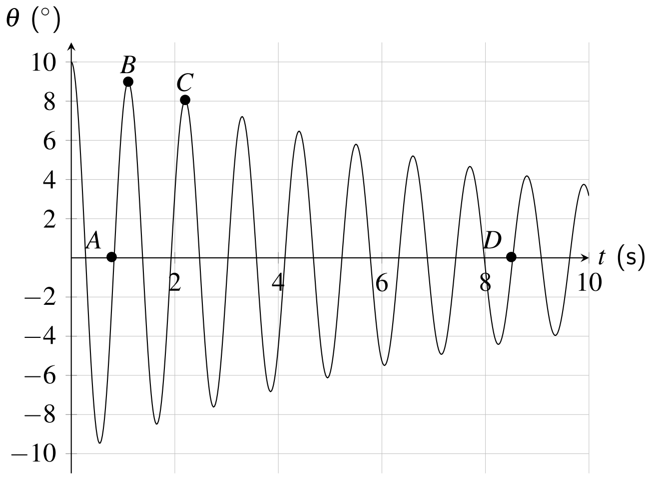

Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ.

11. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T.
12. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ.
13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α.

2 Oscillation d'une masse suspendue à un ressort

Barème doublé

On s'intéresse au mouvement d'un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l'objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l'étudier. On idéalise le comportement du ressort en l'assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l'objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.

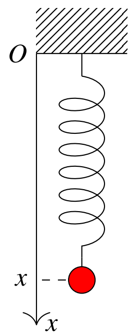

Figure 4: Masse suspendue à un ressort.

14. Définir le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

    Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.

    Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.

    Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.

15. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

où ω_0 et x_{eq} sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.

16. Déterminer ce que représente la position M_{eq} d'abscisse $x = x_{eq}$.

17. Pour résoudre l'équation du mouvement, on déplace l'origine du repère en M_{eq}. Montrer que cela revient à faire le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$.

18. En déduire que l'on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.

19. Résoudre en tenant compte des conditions initiales.

20. Représenter l'évolution temporelle de l'abscisse x.