DS 5 - Mécanique du point

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 2 parties **indépendantes**.
- **Les calculatrices sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- $\ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,11.$

---

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ (avec $g = 9,81$ m.s^{-2}), $\overrightarrow{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

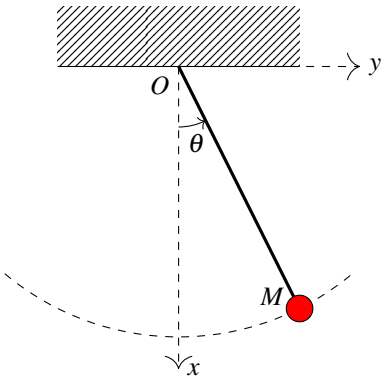

Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.

   La projection du principe fondamentale de la dynamique est nulle selon l'axe (Oz). Comme la vitesse initiale est nulle, la vitesse du système selon l'axe (Oz) est nulle à tout instant, **le mouvement s'effectue uniquement dans le plan (Oxy).**

2. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.

   On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système qu'est le point matériel M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Si on utilise le système de coordonnées polaires, il vient que

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{T} \\ &= mg\cos\theta\vec{u}_\rho - mg\sin\theta\vec{u}_\theta - T\vec{u}_\rho. \end{aligned}$$

   avec $\vec{P}$ le poids du point et $\vec{T}$ la tension du fil. On peut exprimer l'accélération à partir du vecteur position

$$\vec{OM} = l\vec{u}_\rho \quad ; \quad \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

En se limitant à la composante orthoradiale du PFD, il vient que

$$ma_\theta = -mg\sin\theta \quad ; \quad l\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad ; \quad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.}$$

3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.
En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.
Pour des élongations angulaires faibles, on peut utiliser le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 1 en 0, soit

$$\sin\theta \approx \theta$$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La solution générale de cette équation est

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes à déterminer à partir des conditions initiales. Ici $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Donc il vient que

$$\theta(t=0) = A = \theta_0$$

soit

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

La vitesse angulaire est donc

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t).$$

A $t = 0$, il vient que

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 B = 0$$

donc $B = 0$, et ainsi

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t).}$$

4. On ne considère plus que les élongations sont faibles. On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta$. Montrer, en multipliant cette équation par $\dot{\theta}$, que la vitesse angulaire du pendule peut se mettre sous la forme

$$\dot{\theta}^2(t) = \pm\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}.$$

On multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$

$$\theta\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta\dot{\theta}.$$

On identifie deux dérivées temporelles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_0^2\cos(\theta(t))\right).$$

En intégrant par rapport au temps, il vient que

$$\int_{\dot{\theta}^2(t=0)}^{\dot{\theta}^2(t)} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t')\right) = \int_{\cos(\theta(t=0))}^{\cos(\theta(t))} \mathrm{d}\left(\omega_0^2\cos\left(\theta(t')\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t=0) = \omega_0^2\left(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta(t=0))\right)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) = \omega_0^2\left(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)\right)$$

la vitesse angulaire du pendule étant nulle à $t = 0$, soit $\dot{\theta}(t = 0) = 0$, et l'angle du pendule étant égal à θ_0 à $t = 0$. Finalement, il vient que

$$\dot{\theta}^2(t) = \pm\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}.$$

5. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

   On remarque que le passage de la position $\theta = 0$ à la position $\theta = \theta_0$ se fait durant une durée $\frac{T}{4}$. On peut donc intégrer la différentielle de temps $\mathrm{d}t$ entre ces deux positions pour obtenir la valeur de $\frac{T}{4}$.

   Pour obtenir l'expression de la différentielle de temps $\mathrm{d}t$, on utilise l'équation obtenue précédemment, soit

   $$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

   Afin de choisir le bon signe, il faut remarquer que lors du passage de la position $\theta = 0$ à la position $\theta = \theta_0$, d'après l'orientation de θ donné par le schéma, la vitesse diminue mais reste positive, il faut donc choisir la racine positive (si on avait étudié le mouvement entre θ_0 et 0, la vitesse aurait été négative).

   Il vient que

   $$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

   donc

   $$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta$$

   et finalement

   $$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

   N.B. On aurait pu intégrer la différentiel de temps entre θ_0 et $-\theta_0$, puis entre $-\theta_0$ et θ_0 pour obtenir T directement, mais il aurait fallu distinguer les trajets avec vitesse positive et négative, et utiliser la symétrie du mouvement

   $$T = \int_{\theta_0}^{-\theta_0} -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta$$

   $$T = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

   Or comme la fonction est paire, il vient que

   $$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

   On ne demande pas de calculer cette intégrale.

   Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

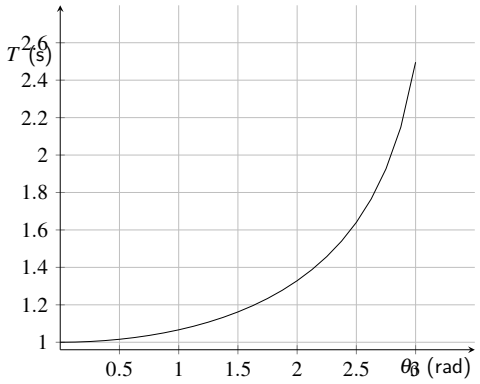

Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0.

On constate que pour les faibles valeurs d'angle initial $\theta_0 \ll 1$ **on a bien un mouvement isochrone** : la période ne dépend pas de θ_0.

6. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

   Pour différentes valeurs de θ_0. particulières, on mesure la durée entre deux passages successifs par la verticale,dans le même sens. soit $\theta = 0$, dans le même sens. On obtient la période T pour les différentes valeurs de θ_0.

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du point M et α, une constante positive.

7. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.

   En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

   On utilise le travail effectué à la question 2 en ajoutant la force de frottement orthoradiale car selon le vecteur vitesse. Ainsi

$$ma_\theta = -mg\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$$
$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$$
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.}$$

   On retrouver la pulsation propre du système

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

   et **le temps caractéristique τ d'évolution du système** tel que

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$$

   donc

$$\boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}.}$$

8. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

Le régime est pseudopériodique si le facteur de qualité Q est supérieur à $1/2$.

Le facteur de qualité est lié à la constante de temps du système de telle manière que

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{2}{\tau\omega_0^2}$$

soit

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2}$$

donc il faut que

$$\frac{\omega_0\tau}{2} > \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\omega_0 > \frac{1}{\tau}.}$$

Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

La pseudo-pulsation, par définition, est

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

soit

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}.}$$

Et la pseudo-période est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}.}$$

9. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

Exprimer δ en fonction de T et τ.

L'expression générale de θ en régime pseudo-périodique est

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)$$

il vient donc que

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)}{e^{-(t+T)/\tau}\left(\cos(\omega_0(t+T)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0(t+T))\right)}.$$

Le régime étant pseudo-périodique $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0(t+T))$ et $\sin(\omega_0 t) = \sin(\omega_0(t+T))$ donc

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+T)/\tau}} = e^{-t/\tau+t/\tau+T/\tau} = e^{T/\tau}.$$

Ainsi le décrément logarithmique est simplement le rapport entre la pseudo-période et le temps caractéristique d'évolution du système

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = \frac{T}{\tau}.$$

10. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

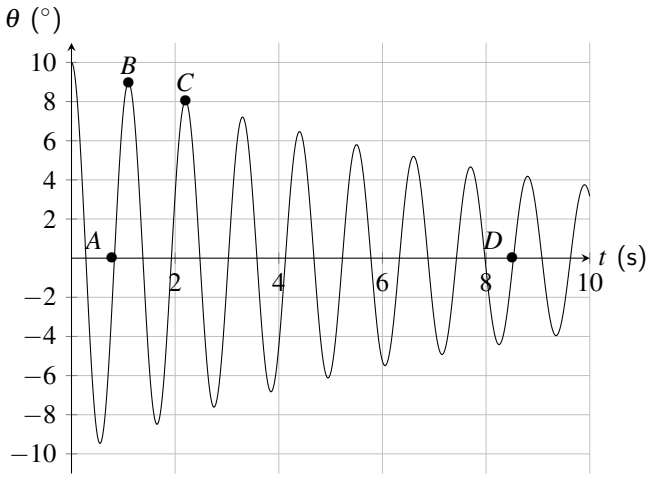

Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ.

En étudiant les deux maxima successifs B et C on le décrément logarithmique. Comme ils sont séparés d'une période, le rapport de leur valeur de θ est

$$\frac{\theta(B)}{\theta(C)} = \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$$

donc il vient que

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(B)}{\theta(C)}\right).$$

A.N.

$$\delta = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,110.$$

11. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T.

On peut mesurer la durée séparant les points B et C afin d'obtenir la pseudo-période T.

A.N.

$$T = 2,2 - 1,1 = 1,1 \text{ s}.$$

12. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ.

On obtient le temps τ à partir des deux dernières questions. En effet, on a montré que

$$\delta = \frac{T}{\tau}$$

donc

$$\tau = \frac{T}{\delta}.$$

A.N.

$$\tau = \frac{1,1}{0,110} = 10 \text{ s}.$$

13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α.

On a montré que le temps τ était défini tel que

$$\tau = \frac{2m}{\alpha}$$

donc

$$\alpha = \frac{2m}{\tau}.$$

A.N.

$$\alpha = \frac{2 \times 0,470 \text{ kg}}{10 \text{ s}} = 9,4.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}.$$

2 Oscillation d'une masse suspendue à un ressort

Barème doublé

On s'intéresse au mouvement d'un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l'objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l'étudier. On idéalise le comportement du ressort en l'assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l'objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.

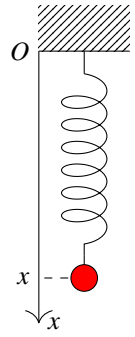

Figure 4: Masse suspendue à un ressort.

14. Définir le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.

Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.

Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.

Le système est le petit objet de masse m considéré comme ponctuel. On l'étudie dans le référentiel terrestre.

Les forces exercées sur lui son son poids $\overrightarrow{P}$ et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{T_r}$.

On utilise le repère cartésien dont l'axe (Ox) est vertical orienté vers le bas.

Si on applique le PFD il vient que

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_r}.$$

15. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

où ω_0 et x_{eq} sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.

Le mouvement s'effectue seulement selon l'axe (Ox) il vient que

$$m\ddot{x}\overrightarrow{u_x} = mg\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{T_r}.$$

Afin d'obtenir l'expression de $\overrightarrow{T_r}$ on utilise l'expression vectorielle de force de rappel du ressort

$$\overrightarrow{T_r} = -k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_{\text{équ}}\right)$$

$$\overrightarrow{T_r} = -k\left(x\overrightarrow{u_x} - l_0\overrightarrow{u_x}\right)$$

il vient que

$$m\ddot{x} = mg - k\left(x - l_0\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}l_0.$$

On identifie une équation différentielle du deuxième ordre caractéristique d'un oscillateur harmonique mais avec un second membre non nul. On peut également identifier la pulsation propre du système ω_0 introduite dans l'énoncé

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ainsi

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 l_0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left(l_0 + \frac{1}{\omega_0^2}g\right)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left(l_0 + \frac{m}{k}g\right).$$

On peut alors identifier la constante $x_{eq} = l_0 + \frac{m}{k}g$.

16. Déterminer ce que représente la position M_{eq} d'abscisse $x = x_{eq}$.

La position M_{eq} est la position pour laquelle $x = x_{eq}$ or, on remarque que $x(t)$ est égale à x_{eq} lorsque l'accélération est nulle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}.$$

Donc, lorsque $x = x_{eq}$, la somme des forces qui s'applique sur le système est nulle, le système est à l'équilibre : la position M_{eq} est la position d'équilibre autour de laquelle va osciller le système.

17. Pour résoudre l'équation du mouvement, on déplace l'origine du repère en M_{eq}. Montrer que cela revient à faire le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$.

En effectuant le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$ il vient que

$$x = X + x_{eq}$$

soit

$$\left(\ddot{X} + \ddot{x_{eq}}\right) + \omega_0^2\left(X + x_{eq}\right) = \omega_0^2 x_{eq}$$

comme x_{eq} est une constante il vient que

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \omega_0^2 x_{eq} = \omega_0^2 x_{eq}$$

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

18. En déduire que l'on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.

On remarque que l'équation précédente est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique dont on connaît la solution générale qui est

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales. En effectuant le changement d'inconnue $x = X + x_{eq}$ il vient que

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{eq}.$$

19. Résoudre en tenant compte des conditions initiales.

À $t = 0$ le ressort est dans état de repos soit $x(t=0) = l_0$ donc

$$l_0 = A + x_{eq}$$

$$A = l_0 - x_{eq}.$$

À $t = 0$ la vitesse du ressort est nulle donc

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 (l_0 - x_{eq})\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

$$0 = \omega_0 B$$

$$B = 0.$$

Ainsi l'équation du mouvement de l'objet est

$$x(t) = (l_0 - x_{eq})\cos(\omega_0 t) + x_{eq}$$

$$x(t) = \left(l_0 - l_0 - m\frac{k}{g}\right)\cos(\omega_0 t) + x_{eq}$$

$$x(t) = x_{eq} - m\frac{k}{g}\cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = x_{eq} + m\frac{k}{g}\cos(\omega_0 t + \pi)$$

20. Représenter l'évolution temporelle de l'abscisse x.

L'évolution temporelle de l'abscisse de l'objet correspond à une fonction cosinus de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ de phase à l'origine π oscillant autour de la valeur $x_{eq} = l_0 + \frac{m}{k}g$ avec une amplitude $\frac{m}{k}g$. Le maximum de la fonction est donc $l_0 + 2\frac{m}{k}g$ et son minimum est l_0.