

DS 6 - Énergétique du point

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 2 parties **indépendantes**.
- Les **calculatrices sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- $\ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,11$.

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{u}_x$ (avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$), $\vec{u}_x$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox . On note, l'angle orienté : $\theta = (\vec{u}_x, \vec{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

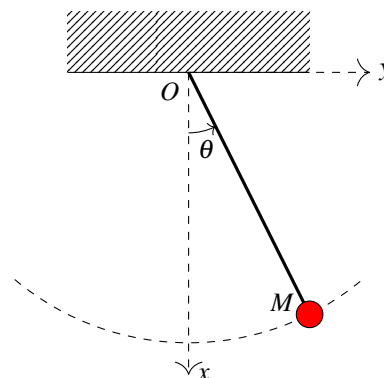


Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ à l'aide d'un théorème énergétique.
3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g .
En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.
4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ . On prendra comme origine de l'énergie potentielle le point le plus bas du mouvement, soit le point en $\theta = 0$.
5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\dot{\theta}^2$, θ , θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

6. On ne considère plus que les élongations sont faibles. On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$. Montrer, en multipliant cette équation par $\dot{\theta}$, que la vitesse angulaire du pendule peut se mettre sous la forme

$$\dot{\theta}^2(t) = \pm \sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta(t) - \cos \theta_0)}.$$

7. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ , θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

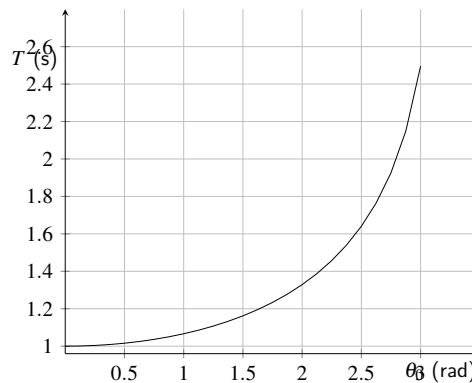


Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0 .

8. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T .

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, avec $\vec{v}$ la vitesse du point M et α , une constante positive.

9. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ en utilisant un théorème énergétique.
En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

10. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?
Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T .
11. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right).$$

Exprimer δ en fonction de T et τ .

12. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

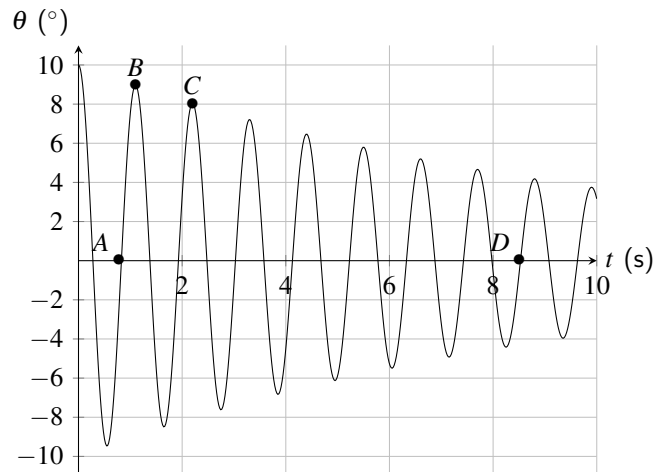


Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

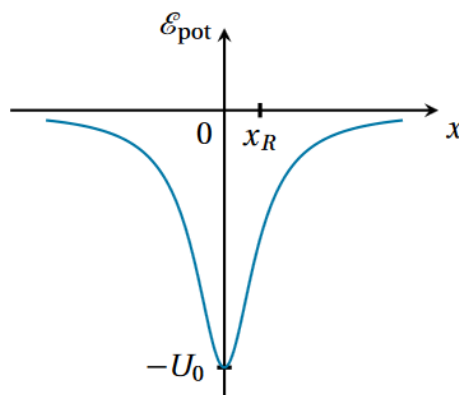
Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ .

13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T .
14. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ .
15. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α .

2 Puits de potentiel

Barème doublé

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium ${}^7\text{Li}$, modélisé par un point matériel de masse m . Un faisceau laser focalisé au point O d'abscisse $x = 0$ exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$, avec U_0 et x_R des constantes positives. La fonction $\mathcal{E}_{\text{pot}}(x)$ est représentée sur la figure suivante.



L'axe (Ox) est horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupe pas.

Données : masse d'un nucléon $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, longueur $x_R = 3,0 \cdot 10^{-4}$ m. La profondeur U_0 est donnée en unité de température : $U_0 = k_B T_0$ avec $k_B = 1,38 \cdot 10^{-27}$ J.K⁻¹ la constante de Boltzmann et $T_0 = 200$ μ K.

16. On considère un atome initialement immobile en $x = 0$ au fond du puits de potentiel. À l'instant $t = 0$, on lui communique une vitesse v_0 positive selon $\vec{u}_x$. **Déterminer** les conditions impliquant entre autres U_0 et v_0 pour que l'atome demeure dans un état lié.
17. Dans le cas où l'atome est mis dans un état de diffusion, déterminer l'expression de sa vitesse limite, notée v_∞ , quand $x \rightarrow \infty$.
18. On suppose que $v_0^2 \ll 2U_0/m$. Montrer, à l'aide d'un développement limité de $\mathcal{E}_{pot}(x)$ pour $x/x_R \ll 1$, que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée ω_0 , dont on calculera la valeur.
19. Dans cette question et celles qui suivent, on considère que l'axe (Ox) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que $x/x_R \ll 1$.
Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée $\mathcal{E}'_{pot}$. On utilisera la variable $y = x/x_R$ et le paramètre sans dimension $\alpha = U_0/(mgx_R)$.
20. Justifier brièvement, en traçant son allure, que $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ peut présenter de nouveau un minimum local si α est supérieur à une valeur critique α_c dont on ne cherchera pas à donner la valeur. Tracer l'allure de $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ pour $\alpha > \alpha_c$.
21. On donne $\alpha_c = 1,54$. Calculer la valeur de U_0 correspondante, les autres paramètres étant inchangés et commenter.
22. Expliquer, sans mener les calculs, comment calculer la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.