DS 6 - Énergétique du point

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 2 parties **indépendantes**.
- **Les calculatrices sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- $\ln\left(\frac{8{,}95}{8{,}02}\right) = 0{,}11$.

---

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{u_x}$ (avec $g = 9{,}81$ m.s^{-2}), $\vec{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : $\theta = (\vec{u_x}, \overrightarrow{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

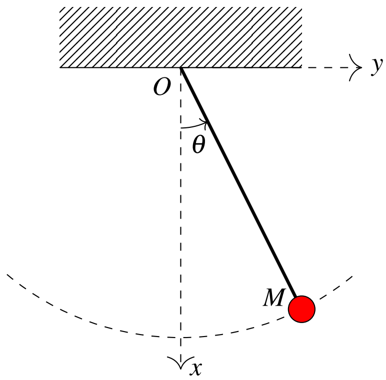


Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.

   La projection du principe fondamentale de la dynamique est nulle selon l'axe (Oz). Comme la vitesse initiale est nulle, la vitesse du système selon l'axe (Oz) est nulle à tout instant, **le mouvement s'effectue uniquement dans le plan (Oxy).**

2. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ à l'aide d'un théorème énergétique.

   Le système étudié est le pendule dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées sur le système sont son poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.

   La vitesse du pendule dans le repère polaire est

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}.$$

   Comme la tension du fil est selon $\vec{u_\rho}$, donc donc orthogonale à $\vec{u_\theta}$, sa puissance s'annule

$$\mathscr{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ainsi le théorème de la puissance cinétique donne

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{P}) = m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{v} = -mg\sin\theta l\dot{\theta}.$$

L'énergie cinétique est

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta}$$

ainsi

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta}.$$

Comme on recherche des solutions pour lesquelles $\dot{\theta} \neq 0$, on peut diviser la dernière équation par $\dot{\theta}$, donc

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta.$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.}$$

3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.

   En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.

   Pour des élongations angulaires faibles, on peut utiliser le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 1 en 0, soit

$$\sin\theta \approx \theta$$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La solution générale de cette équation est

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes à déterminer à partir des conditions initiales. Ici $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Donc il vient que

$$\theta(t=0) = A = \theta_0$$

soit

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

La vitesse angulaire est donc

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t).$$

A $t = 0$, il vient que

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 B = 0$$

donc $B = 0$, et ainsi

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t).}$$

4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ. On prendra comme origine de l'énergie potentielle le point le plus bas du mouvement, soit le point en $\theta = 0$.

   Comme l'axe (Ox) est dirigé vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur est

$$\mathscr{E}_p = -mgx + \text{cst}$$

   soit

$$\mathscr{E}_p = -mgl\cos\theta + \text{cst}.$$

   On prend comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur le point le plus bas du mouvement, soit le point en $\theta = 0$, ainsi

$$0 = -mgl + \text{cst} \qquad \text{donc} \qquad \text{cst} = mgl$$

   donc

$$\boxed{\mathscr{E}_p = mgl\,(1 - \cos\theta)\,.}$$

5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

   En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\dot{\theta}^2$, θ, θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

   D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Comme la tension du fil ne travaille pas car orthogonale au mouvement, la seule force travaillant est le poids qui est une force conservative. Ainsi, le travail des forces non conservatives est nulle donc l'énergie mécanique ne varie : **elle se conserve au cours du mouvement**.

   Comme l'énergie mécanique est telle que

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$$

   à $t = 0$ il vient que

$$\mathscr{E}_m(t=0) = \mathscr{E}_p(t=0) = mgl\,(1 - \cos\theta_0)$$

   car à $t = 0$ la vitesse est nulle d'après l'énoncé.

   À un autre instant t quelconque

$$\mathscr{E}_m(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\,(1 - \cos\theta)\,.$$

   Comme l'énergie mécanique ne varie pas au cours du mouvement, il vient que

$$\mathscr{E}_m(t=0) = \mathscr{E}_m(t)$$

   soit

$$mgl\,(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\,(1 - \cos\theta)$$

$$g\,(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2$$

   donc

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{2\frac{g}{l}\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \pm\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

   avec choix du signe dépendant du sens du mouvement.

6. On ne considère plus que les élongations sont faibles. On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$. Montrer, en multipliant cette équation par $\dot{\theta}$, que la vitesse angulaire du pendule peut se mettre sous la forme

$$\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta(t) - \cos\theta_0\right)}.$$

On multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta\,\dot{\theta}.$$

On identifie deux dérivées temporelles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_0^2 \cos\left(\theta(t)\right)\right).$$

En intégrant par rapport au temps, il vient que

$$\int_{\dot{\theta}^2(t=0)}^{\dot{\theta}^2(t)} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t')\right) = \omega_0^2 \int_{\cos(\theta(t=0))}^{\cos(\theta(t))} \mathrm{d}\left(\cos\left(\theta(t')\right)\right)$$
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t=0) = \omega_0^2\left(\cos\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta(t=0)\right)\right)$$
$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(t) = \omega_0^2\left(\cos\left(\theta(t)\right) - \cos\left(\theta_0\right)\right)$$

la vitesse angulaire du pendule étant nulle à $t=0$, soit $\dot{\theta}(t=0)=0$, et l'angle du pendule étant égal à θ_0 à $t=0$. Finalement, il vient que

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta(t) - \cos\theta_0\right)}.}$$

7. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

On remarque que le passage de la position $\theta = 0$ à la position $\theta = \theta_0$ se fait durant une durée $\frac{T}{4}$. On peut donc intégrer la différentielle de temps $\mathrm{d}t$ entre ces deux positions pour obtenir la valeur de $\frac{T}{4}$.

Pour obtenir l'expression de la différentielle de temps $\mathrm{d}t$, on utilise l'équation obtenue précédemment, soit

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}.$$

Afin de choisir le bon signe, il faut remarquer que lors du passage de la position $\theta = 0$ à la position $\theta = \theta_0$, d'après l'orientation de θ donné par le schéma, la vitesse diminue mais reste positive, il faut donc choisir la racine positive (si on avait étudié le mouvement entre θ_0 et 0, la vitesse aurait été négative).

Il vient que

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\mathrm{d}\theta.$$

donc

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\mathrm{d}\theta$$

et finalement

$$\boxed{T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\mathrm{d}\theta.}$$

N.B. On aurait pu intégrer la différentiel de temps entre θ_0 et $-\theta_0$, puis entre $-\theta_0$ et θ_0 pour obtenir T directement, mais il aurait fallu distinguer les trajets avec vitesse positive et négative, et utiliser la symétrie du mouvement

$$T = \int_{\theta_0}^{-\theta_0} -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta$$

$$T = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

Or comme la fonction est paire, il vient que

$$T = 4\int_{0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

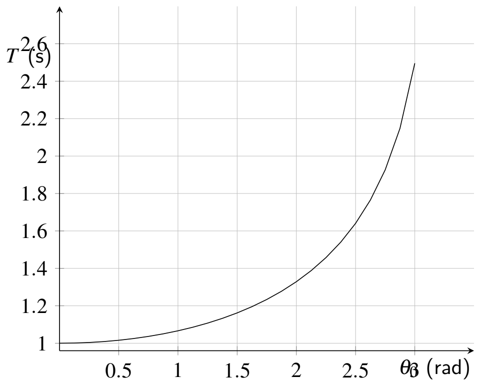


Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0.

On constate que pour les faibles valeurs d'angle initial $\theta_0 \ll 1$ **on a bien un mouvement isochrone** : la période ne dépend pas de θ_0.

8. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

   Pour différentes valeurs de θ_0. particulières, on mesure la durée entre deux passages successifs par la verticale,dans le même sens. soit $\theta = 0$, dans le même sens. On obtient la période T pour les différentes valeurs de θ_0.

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du point M et α, une constante positive.

9. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ en utilisant un théorème énergétique.

   En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

   On peut utiliser le théorème de la puissance cinétique utilisé plus tôt, en ajoutant la puissance des forces de frottements, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{P}) + \mathscr{P}(\overrightarrow{f})$$

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta} - \alpha v^2$$

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta} - \alpha l^2\dot{\theta}^2.$$

Il vient donc que

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\sin\theta\dot{\theta} = 0.$$

En se limitant aux petits angles

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta\dot{\theta} = 0.$$

En divisant par $\dot{\theta} \neq 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

On peut alors identifier les différents termes de cette équation avec les termes de l'énoncé.

On retrouver la pulsation propre du système

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

et **le temps caractéristique τ d'évolution du système** tel que

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$$

donc

$$\boxed{\tau = \frac{2m}{\alpha}.}$$

10. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

Le régime est pseudopériodique si le facteur de qualité Q est supérieur à $1/2$.

Le facteur de qualité est lié à la constante de temps du système de telle manière que

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{2}{\tau\omega_0^2}$$

soit

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2}$$

donc il faut que

$$\frac{\omega_0\tau}{2} > \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\omega_0 > \frac{1}{\tau}.}$$

Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

La pseudo-pulsation, par définition, est

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

soit

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}.}$$

Et la pseudo-période est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}.}$$

11. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

Exprimer δ en fonction de T et τ.

L'expression générale de θ en régime pseudo-périodique est

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)$$

il vient donc que

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)}{e^{-(t+T)/\tau}\left(\cos(\omega_0(t+T)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0(t+T))\right)}.$$

Le régime étant pseudo-périodique $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0(t+T))$ et $\sin(\omega_0 t) = \sin(\omega_0(t+T))$ donc

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+T)/\tau}} = e^{-t/\tau+t/\tau+T/\tau} = e^{T/\tau}.$$

Ainsi le décrément logarithmique est simplement le rapport entre la pseudo-période et le temps caractéristique d'évolution du système

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = \frac{T}{\tau}.}$$

12. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

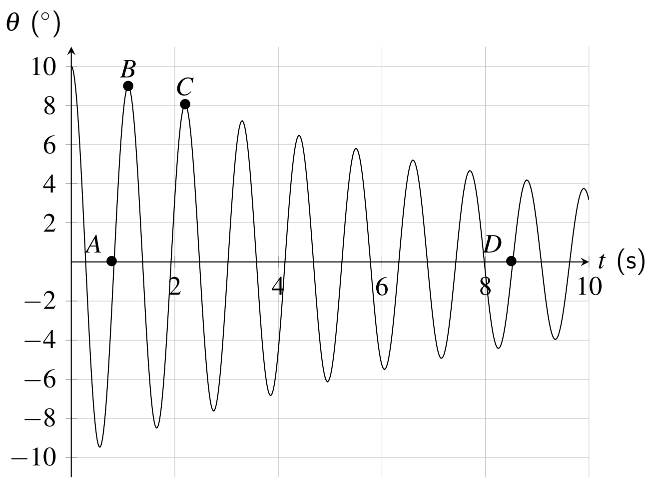


Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ.

En étudiant les deux maxima successifs B et C on le décrément logarithmique. Comme ils sont séparés d'une période, le rapport de leur valeur de θ est

$$\frac{\theta(B)}{\theta(C)} = \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$$

donc il vient que

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(B)}{\theta(C)}\right).$$

A.N.

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,110.}$$

13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T.

On peut mesurer la durée séparant les points B et C afin d'obtenir la pseudo-période T.

A.N.

$$\boxed{T = 2,2 - 1,1 = 1,1 \text{ s.}}$$

14. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ.

On obtient le temps τ à partir des deux dernières questions. En effet, on a montré que

$$\delta = \frac{T}{\tau}$$

donc

$$\tau = \frac{T}{\delta}.$$

A.N.

$$\boxed{\tau = \frac{1,1}{0,110} = 10 \text{ s.}}$$

15. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α.

On a montré que le temps τ était défini tel que

$$\tau = \frac{2m}{\alpha}$$

donc

$$\alpha = \frac{2m}{\tau}.$$

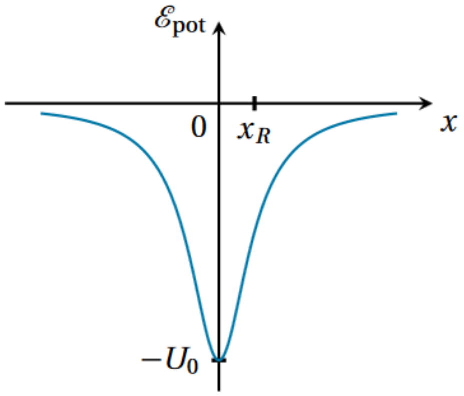
A.N.

$$\boxed{\alpha = \frac{2 \times 0,470 \text{ kg}}{10 \text{ s}} = 9,4.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}.}$$

2 Puits de potentiel

Barème doublé

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium ^{7}Li, modélisé par un point matériel de masse m. Un faisceau laser focalisé au point O d'abscisse $x = 0$ exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$, avec U_0 et x_R des constantes positives. La fonction $\mathscr{E}_{pot}(x)$ est représentée sur la figure suivante.



L'axe (Ox) est horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupe pas.

Données : masse d'un nucléon $m_n = 1{,}67.10^{-27}$ kg, longueur $x_R = 3{,}0.10^{-4}$ m. La profondeur U_0 est donnée en unité de température : $U_0 = k_B T_0$ avec $k_B = 1{,}38.10^{-27}$ J.K^{-1} la constante de Boltzmann et T_0 = 200 µK.

16. On considère un atome initialement immobile en $x = 0$ au fond du puits de potentiel. À l'instant $t = 0$, on lui communique une vitesse v_0 positive selon $\overrightarrow{u_x}$. **Déterminer** les conditions impliquant entre autres U_0 et v_0 pour que l'atome demeure dans un état lié.

La force exercée sur l'atome est conservative donc l'énergie mécanique est conservée. De plus, l'atome reste dans un état lié si son énergie mécanique est inférieure à la valeur asymptotique de $\mathscr{E}_{pot}$ quand x tend vers l'infini, soit $\mathscr{E}_{pot}(x \to \pm\infty) = 0$ donc $\mathscr{E}_m < 0$. On calcule à l'état initial

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - U_0$$

la condition est donc

$$\boxed{v_0 < \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.}$$

17. Dans le cas où l'atome est mis dans un état de diffusion, déterminer l'expression de sa vitesse limite, notée v_∞, quand $x \to \infty$.

Lorsque l'atome est dans un état de diffusion son énergie mécanique est supérieure même pour les valeurs asymptotiques de l'énergie potentielle. Pour ces valeurs l'énergie mécanique est

$$\mathscr{E}_m(x \to \pm\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2.$$

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique à l'instant initial et pour $x \to \pm\infty$ il vient que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - U_0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

soit

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \frac{2U_0}{m}}.}$$

18. On suppose que $v_0^2 \ll 2U_0/m$. Montrer, à l'aide d'un développement limité de $\mathscr{E}_{pot}(x)$ pour $x/x_R \ll 1$, que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée ω_0, dont on calculera la valeur.

    Pour $z \ll 1$ le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $(1+z)^\alpha \approx 1+\alpha z$ donc il vient que

    $$\mathscr{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = -U_0\left(1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right)^{-1} \approx -U_0\left(1-\left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right) = -U_0 + \frac{U_0}{x_R^2}x^2.$$

    On peut réécrire l'énergie potentielle sous la forme

    $$\mathscr{E}_{pot}(x) = -U_0 + \frac{1}{2}kx^2$$

    avec $k = \frac{2U_0}{x_R^2}$.

    On reconnaît l'expression de l'énergie potentiel d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ soit

    $$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{mx_R^2}}.}$$

    A.N.

    $$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_BT_0}{7\times m_n \times x_R^2}} = \sqrt{\frac{2\times 1{,}38.10^{-23}\times 200.10^{-6}}{7\times 1{,}67.10^{-27}\times(3{,}0.10^{-4})^2}} = 2{,}3.10^3 \text{ rad.}$$

19. Dans cette question et celles qui suivent, on considère que l'axe (Ox) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que $x/x_R \ll 1$.

    Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée $\mathscr{E}'_{pot}$. On utilisera la variable $y = x/x_R$ et le paramètre sans dimension $\alpha = U_0/(mgx_R)$.

    On rajoute l'énergie potentielle de pesanteur mgx à l'expression précédente en considérant que l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est située en $x=0$. Il vient que

    $$\mathscr{E}'_{pot} = mgx - \frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgx\frac{x_R}{x_R} - \frac{mgx_R}{mgx_R}\frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgyx_Ry - mgx_R\frac{\alpha}{1+y^2}$$

    donc

    $$\boxed{\mathscr{E}'_{pot} = mgx_R\left(y - \frac{\alpha}{1+y^2}\right).}$$

20. Justifier brièvement, en traçant son allure, que $\mathscr{E}'_{pot}(y)$ peut présenter de nouveau un minimum local si α est supérieur à une valeur critique α_c dont on ne cherchera pas à donner la valeur. Tracer l'allure de $\mathscr{E}'_{pot}(y)$ pour $\alpha > \alpha_c$.

    On a représenté l'allure de $\mathscr{E}'_{pot}(y)$ pour différentes valeurs de α sur la Figure 4. Pour α faible, on retrouve la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. L'énergie potentielle due au laser $\mathscr{E}_{pot}$ creuse une indentation dans la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. Cette indentation est d'autant plus grande que α est grand. Si α est suffisamment important, la contribution de $\mathscr{E}_{pot}$ peut rendre $\mathscr{E}'_{pot}(y)$ localement décroissante : on a alors un minimum local d'énergie potentielle, soit un nouvel équilibre stable.

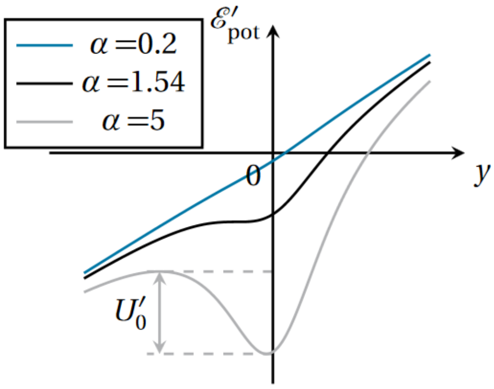


Figure 4: Allure de $\mathscr{E}'_{pot}(y)$ pour différentes valeurs de α.

21. On donne $\alpha_c = 1,54$. Calculer la valeur de U_0 correspondante, les autres paramètres étant inchangés et commenter.

La valeur $\alpha = 1,54$ marque l'apparition de ce minimum local. D'après la définition de α, on calcule alors

$$\alpha_c U_0 = \alpha_c mgx_R.$$

A.N.

$$\alpha_c U_0 = 1,54 \times 7 \times 1,67.10^{-27} \times 9,8 \times 3,0.10^{-4} = 5{,}3 \times 10^{-29}\,\text{J}.$$

Il faut comparer cette valeur à $U_0 = k_B T_0$ pour montrer que pour cette valeur de $\alpha_c U_0$ on a bien un minimum local de l'énergie potentielle, soit

A.N.

$$\boxed{U_0 = 1,38.10^{-23} \times 200.10^{-6} = 2{,}8 \times 10^{-27}\,\text{J}.}$$

Pour cette valeur de α_c on voit bien apparaître un minimum local du potentiel.

22. Expliquer, sans mener les calculs, comment calculer la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.

La profondeur du piège est la grandeur U_0' représentée sur la Figure 4. On détermine les abscisses du minimum x_{min} et du maximum x_{max} locaux de $\mathscr{E}'_{pot}$ en annulant sa dérivée. La profondeur U_0' est alors $\mathscr{E}'_{pot}(x_{max}) - \mathscr{E}'_{pot}(x_{min})$. La position d'équilibre est en $x = x_{min}$.