Exercice type

Chapitre 6 : thermodynamique - partie 1

1 Quelques aspects thermodynamiques de l'atmosphère

Adapté du concours Centrale-Supélec TSI (2011)

La densité de l'air atmosphérique décroît fortement avec l'altitude, ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atmosphère est concentrée dans la troposphère. Dans les questions suivantes, nous étudierons uniquement cette région qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude. Le champ de pesanteur terrestre y est supposé uniforme : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ où le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ correspond à la surface des mers et océans. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

1. Donner, en ordre de grandeur, les valeurs de la pression moyenne P_0 et de la température moyenne T_0 à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$.

   La pression moyenne à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$ est $P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 1{,}1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{pa}$.

   La température moyenne à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$ est $T_0 = 15\,°\mathrm{C} = 288\,\mathrm{K} \approx 300\,\mathrm{K}$.

2. On note μ la masse volumique de l'air. En considérant les deux principaux constituants de l'air, justifier la valeur de M_{air}.

   L'atmosphère est composé en ordre de grandeur à 80% de diazote et à 20% de dioxygène, ainsi la masse molaire moyenne de l'air est telle que

$$M_{\text{air}} \approx \frac{80 \times M_{N_2} + 20 \times M_{O_2}}{100}$$
$$M_{\text{air}} \approx \frac{80 \times 28{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}} + 20 \times 32{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}}{100}$$
$$M_{\text{air}} \approx 28{,}8\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$$

   soit exactement la valeur fournie $M_{\text{air}} = 28{,}8\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

3. En considérant l'air comme un gaz parfait, montrer que l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P = \mu R_{\text{air}} T$ où P et T sont la pression et la température absolue du gaz et R_{air} est une constante qui dépend du gaz. Calculer cette constante en unités SI.

   En utilisant l'expression des gaz parfaits

$$PV = nRT$$
$$P = \frac{nRT}{V}$$
$$P = \frac{nRT}{V} \times \frac{m}{m}$$
$$P = \frac{n}{m} \times \frac{m}{V} \times RT$$
$$P = \frac{1}{M_{\text{air}}} \times \mu \times RT$$
$$P = \mu \times \frac{R}{M_{\text{air}}} \times T$$

$$\boxed{P = \mu R_{\text{air}} T}$$

avec m la masse du volume d'air V étudié et $R_{\text{air}} = \frac{R}{M_{\text{air}}}$ la constante à trouver s'exprimant en $\frac{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}}{\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}} = \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

A.N.

$$\boxed{R_{\text{air}} = \frac{R}{M_{\text{air}}} = \frac{8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}}{28{,}8\times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}} = 289\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}.}$$

4. On considère un volume d'air cubique V dont la face inférieure est situé à l'altitude z et la face supérieure est située à l'altitude $z+\mathrm{d}z$. Exprimer le volume V en fonction de S la surface du cube et $\mathrm{d}z$.

   D'après l'énoncé $V = S\mathrm{d}z$.

5. À partir de l'équilibre mécanique atteint par ce volume d'air, exprimer la différence entre les pression $P(z+\mathrm{d}z)$ et $P(z)$ en fonction de μ et g et $\mathrm{d}z$.

   À l'équilibre mécanique le volume d'air est immobile, ainsi

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\
\vec{0} &= \vec{P} + \vec{F_P}(z) + \vec{F_P}(z+\mathrm{d}z) \\
0 &= -mg + P(z)S - P(z+\mathrm{d}z)S \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg}{S} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg\mathrm{d}z}{S\mathrm{d}z} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg\mathrm{d}z}{V} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\mu g\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

6. En déduire que le gradient vertical de pression vaut $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.

   À partir de l'expression précédente il vient que

$$\frac{P(z+\mathrm{d}z) - P(z)}{\mathrm{d}z} = -\mu g$$

   soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g.}$$

7. Le modèle le plus simple d'atmosphère (atmosphère isotherme) consiste à supposer que la température est constante et égale à T_0. En exploitant le gradient vertical de pression et l'expression des gaz parfaits obtenue plus tôt, en déduire $P(z)$ (on manipulera les différentielle et on fera attention à intégrer entre les bornes d'intégration adéquates). Décrire alors comment varie la pression en fonction de l'altitude.

   En utilisant l'expression du gaz parfait obtenu plus haut, il vient que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= -\mu g \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}P \\
\frac{\mathrm{d}P}{P} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mathrm{d}z \\
\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z}.}$$

La pression décroît exponentiellement avec l'altitude.

8. À partir d'une analyse dimensionnelle de l'argument de la fonction obtenue pour $P(z)$, définir une longueur caractéristique de variation de pression et la calculer pour la valeur de température moyenne donnée plus tôt.

   Une analyse dimensionnelle de l'argument de l'exponentielle qui doit être sans dimension donne

$$\begin{aligned}
\left[\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z\right] &= 1 \\
[z] &= \left[\frac{R_{\text{air}} T_0}{g}\right] \\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} \times K}}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}} \\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{J \cdot kg^{-1}}}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}} \\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}} \\
\mathrm{m} &= \mathrm{m}.
\end{aligned}$$

   On voit que le terme $\frac{R_{\text{air}} T_0}{g}$ est bien homogène à une longueur, il s'agit de la longueur caractéristique.

   A.N.

$$\boxed{\frac{R_{\text{air}} T_0}{g} = \frac{289\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}} \times 300\,\mathrm{K}}{9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 8{,}84\,\mathrm{km}.}$$

9. Donner l'expression de $\mu(z)$. Décrire alors comment varie la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude.

   En utilisant l'expression du gaz parfait obtenu plus haut, il vient que

$$\begin{aligned}
P(z) &= \mu(z) R_{\text{air}} T_0 \\
\mu(z) &= \frac{P(z)}{R_{\text{air}} T_0} \\
\mu(z) &= \frac{P_0}{R_{\text{air}} T_0} e^{-\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z}}$$

   avec μ_0 la masse volumique de l'air au niveau de la mer.

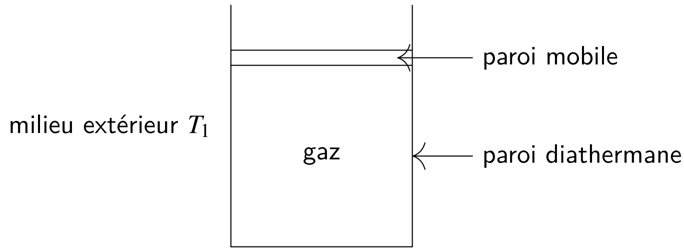
   La masse volumique décroît exponentiellement avec l'altitude.

2 Etudes de transformations d'un gaz parfait

Concours communs polytechnique TSI (2006)

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement.

La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat. A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1, un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.



On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V_1' offert au gaz soit $V_1' = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

10. Déterminer la pression P_1' du gaz dans l'état final en fonction de P_1.

Le gaz étant parfait, on peut utiliser la loi des gaz parfaits

$$PV = nRT.$$

Le système étant fermé, la quantité de matière n est constante.

Les parois étant diathermanes et l'extérieur se comportant comme un thermostat, la température du système aux états d'équilibre est égale à celle de l'extérieur donc

$$T_1 = T_i = T_f.$$

Il vient que

$$P_iV_i = nRT_i = nRT_1 \qquad \text{et} \qquad P_fV_f = nRT_f = nRT_1$$

donc

$$P_iV_i = P_fV_f.$$

Or $P_i = P_1$, $V_i = V_1$, $V_f = 2V_1$, donc

$$P_1V_1 = P_f 2V_1$$

donc

$$\boxed{P_f = \frac{P_i}{2}.}$$

11. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n, R et T_1.

Le travail des forces de pression est

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext}\mathrm{d}V.$$

La paroi étant mobile et la transformation étant quasi-statiique, la pression P du système est définie à tout instant et est égale à la pression extérieure, soit

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\mathrm{d}V$$

soit, en utilisant la loi des gaz parfait

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V.$$

En sortant les constantes ($T = T_1 = \text{cst}$)

$$W = -nRT_1\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}\mathrm{d}V = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right)$$

$$\boxed{W = -nRT_1 \ln 2.}$$

12. Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n, R et T_1.

Le gaz étant parfait la variation d'énergie interne est

$$\boxed{\Delta U = C_V \Delta T = 0.}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W$$

donc

$$0 = Q + W \qquad \text{soit} \qquad Q = -W$$

donc

$$\boxed{Q = nRT_1 \ln 2.}$$

Au cours de la détente le gaz perd de l'énergie sous forme de travail mécanique $W < 0$, pour maintenir sa température à la valeur de la température du milieu extérieur, il doit recevoir de l'énergie sous forme de chaleur $Q > 0$.