DS 7 - Thermodynamique et régime sinusoïdal forcé

Durée : 2h

Indications

- Le sujet est divisé en 4 parties **indépendantes**.
- Les calculatrices sont **interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.
- Coefficient de Laplace de l'air : $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1{,}40$.

---

1 Etudes de transformations d'un gaz parfait

Concours communs polytechnique TSI (2006)

On étudie différentes transformations de n moles d'un gaz parfait.
On notera P la pression du gaz, V son volume et T sa température.
On notera R la constante des gaz parfaits.
Soit c_V la capacité calorifique molaire à volume constant du gaz.
Soit c_P la capacité calorifique molaire à pression constante du gaz.
Soit γ le rapport des capacités calorifiques molaires à pression constante et à volume constant : $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$.

1.1 Préambule

1. Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.

   L'équation d'état d'un gaz parfait est

   $$\boxed{PV = nRT}.$$

   La pression P est exprimée en pascal Pa.

   Le volume V est exprimé en $\mathrm{m^3}$.

   La quantité de matière n est exprimée en mol.

   La constante des gaz parfaits R est exprimée en $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$.

   La température T est exprimée en K.

2. Donner la relation de Mayer qui relie les capacités calorifiques molaires c_P et c_V et la constante des gaz parfaits R. Déduire de la relation de Mayer et de la définition du coefficient γ la relation entre c_V , R et γ, d'une part, et entre c_P , R et γ, d'autre part.

   La relation de Mayer dans le cas des capacités calorifiques (ou capacités thermiques) est

   $$C_P - C_V = nR$$

   dans le cas des capacités thermiques molaires, comme

   $$C_P = nc_P \qquad \text{et} \qquad C_V = nc_V$$

   il vient que

   $$nc_P - nc_V = nR$$

   donc

   $$\boxed{c_P - c_V = R.}$$

   Le rapport des capacités calorifiques molaires, ou coefficient de Laplace, est défini tel que

   $$\gamma = \frac{c_P}{c_V}.$$

   On peut donc exprimer c_P en fonction de c_V

   $$c_P = \gamma c_V.$$

   La relation de Mayer devient alors

   $$\gamma c_V - c_V = R$$

   donc

   $$\boxed{c_V = \frac{R}{\gamma - 1}.}$$

   La capacité thermique molaire à pression constante est donc

   $$\boxed{c_P = \gamma c_V = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.}$$

3. Rappeler l'expression différentielle de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de n moles d'un gaz parfait au cours d'une transformation quelconque en fonction de la température T.

   Pour un gaz parfait, la variation de l'énergie interne $\mathrm{d}U$ au cours d'une transformation quelconque est liée à la variation de température de telle manière que

   $$C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$$

   soit

   $$\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$$

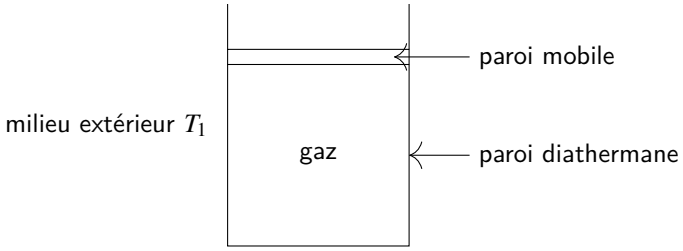
   donc

   $$\boxed{\mathrm{d}U = nc_V \mathrm{d}T.}$$

1.2 Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement.

La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat. A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1, un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.



On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V_1' offert au gaz soit $V_1' = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

4. Déterminer la pression P_1' du gaz dans l'état final en fonction de P_1.

   Le gaz étant parfait, on peut utiliser la loi des gaz parfaits

   $$PV = nRT.$$

   Le système étant fermé, la quantité de matière n est constante.

   Les parois étant diathermanes et l'extérieur se comportant comme un thermostat, la température du système aux états d'équilibre est égale à celle de l'extérieur donc

   $$T_1 = T_i = T_f.$$

   Il vient que

   $$P_iV_i = nRT_i = nRT_1 \qquad \text{et} \qquad P_fV_f = nRT_f = nRT_1$$

   donc

   $$P_iV_i = P_fV_f.$$

   Or $P_i = P_1$, $V_i = V_1$, $V_f = 2V_1$, donc

   $$P_1V_1 = P_f2V_1$$

   donc

   $$\boxed{P_f = \frac{P_i}{2}.}$$

5. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n, R et T_1.

   Le travail des forces de pression est

   $$W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext}\mathrm{d}V.$$

   La paroi étant mobile et la transformation étant quasi-statiique, la pression P du système est définie à tout instant et est égale à la pression extérieure, soit

   $$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\mathrm{d}V$$

   soit, en utilisant la loi des gaz parfait

   $$W = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V.$$

En sortant les constantes ($T = T_1 = \text{cst}$)

$$W = -nRT_1 \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} \mathrm{d}V = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right)$$

$$\boxed{W = -nRT_1 \ln 2.}$$

6. Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n, R et T_1.

Le gaz étant parfait la variation d'énergie interne est

$$\boxed{\Delta U = C_V \Delta T = 0.}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W$$

donc

$$0 = Q + W \qquad \text{soit} \qquad Q = -W$$

donc

$$\boxed{Q = nRT_1 \ln 2.}$$

Au cours de la détente le gaz perd de l'énergie sous forme de travail mécanique $W < 0$, pour maintenir sa température à la valeur de la température du milieu extérieur, il doit recevoir de l'énergie sous forme de chaleur $Q > 0$.

2 Transformations polytropiques

Une transformation polytropique est une transformation quasistatique vérifiant PV^k constante.

7. Calculer le travail des forces de pression pour un gaz parfait subissant une transformation polytropique entre (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et volumes ainsi que de k.

Le travail élémentaire des forces de pression est

$$\delta W = -P_{ext} \mathrm{d}V$$

en considérant que le système à une paroi déformable et que la transformation est quasi-statique, la pression extérieur est égale à la pression du système soit $P_{ext} = P$, ainsi

$$\delta W = -P \mathrm{d}V.$$

Comme la transformation est polytropique, il vient que

$$PV^k = \text{cst} \qquad \text{donc} \qquad PV^k = P_0 V_0^k$$

donc

$$\delta W = -P_0 V_0^k \frac{1}{V^k} \mathrm{d}V$$

en intégrant

$$W = -P_0 V_0^k \int_{V_0}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V^k}$$

car P_0 et V_0 sont des constantes. Ainsi

$$W = -P_0 V_0^k \left[-\frac{1}{k-1} \frac{1}{V^{k-1}} \right]_{V_0}^{V_1}$$

$$W = \frac{P_0 V_0^k}{k-1} \left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_0^{k-1}} \right)$$

$$W = \frac{1}{k-1} \left(\frac{P_0 V_0^k}{V_1^{k-1}} - \frac{P_0 V_0^k}{V_0^{k-1}} \right)$$

et comme $P_0 V_0^k = P_1 V_1^k = \text{cst}$ il vient que

$$W = \frac{1}{k-1} \left(\frac{P_1 V_1^k}{V_1^{k-1}} - \frac{P_0 V_0^k}{V_0^{k-1}} \right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0).}$$

8. On note $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ qui est une constante pour un gaz parfait. Trouver une expression du transfert thermique au cours de la transformation précédente de la forme $C(T_1 - T_0)$ où C est une constante.

On applique le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W$$

soit

$$Q = \Delta U - W.$$

Pour un gaz parfait

$$\Delta U = C_V (T_1 - T_0)$$

donc

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0).$$

En appliquant la loi des gaz parfait il vient que

$$P_0 V_0 = n R T_0 \qquad \text{et} \qquad P_1 V_1 = n R T_1$$

comme la quantité de matière n se conserve au cours de la transformation

$$nR = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \qquad \text{soit} \qquad P_1 V_1 = P_0 V_0 \frac{T_1}{T_0}$$

donc

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} \left(P_0 V_0 \frac{T_1}{T_0} - P_0 V_0 \right)$$

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} \frac{P_0 V_0}{T_0} (T_1 - T_0)$$

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)$$

$$Q = \left(C_V - \frac{nR}{k-1} \right) (T_1 - T_0).$$

D'après la relation de Mayer pourun gaz parfait

$$C_P - C_V = nR$$

de plus on introduit le coefficient de Laplace $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, ainsi

$$\gamma C_V - C_V = nR$$

donc

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}.$$

En remplaçant dans l'expression du transfert thermique

$$Q = \left(\frac{nR}{\gamma - 1} - \frac{nR}{k-1} \right) (T_1 - T_0)$$

$$Q = \frac{nR\,(k - 1 - \gamma + 1)}{(\gamma - 1)\,(k-1)} (T_1 - T_0)$$

$$Q = \frac{nR\,(k-\gamma)}{(\gamma-1)\,(k-1)} (T_1 - T_0).$$

Ainsi

$$\boxed{C = \frac{nR\,(k-\gamma)}{(\gamma-1)\,(k-1)}.}$$

9. Donner une interprétation physique de C.

   Les coefficients k et γ étant sans dimension, on constate que C a la même dimension que nR soit la même dimension qu'**une capacité thermique**.

10. Étudier en les interprétant physiquement les cas suivants : $k = \gamma$, $k = 0$, $k \to \infty$ et $k = 1$.

- Pour $k = \gamma$ il vient que

$$C = \frac{nR\,(k-\gamma)}{(\gamma-1)\,(k-1)} = 0$$

donc $Q = C\,(T_1 - T_0) = 0$. **Il s'agit d'une transformation adiabatique.**

- Pour $k = 0$ il vient que

$$C = \frac{nR\,(k-\gamma)}{(\gamma-1)\,(k-1)} = \frac{nR\gamma}{(\gamma-1)} = nR\frac{\frac{C_P}{C_V}}{\frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V}} = nR\frac{C_P}{C_P - C_V} = nR\frac{C_P}{nR} = C_P.$$

On reconnaît la capacité thermique à pression constante, donc la transformation s'effectue à pression constante, elle est donc **isobare**, pour $k = 0$.
Si on étudie la relation polytropique

$$PV^k = \text{cst} \qquad \text{soit} \qquad PV^0 = \text{cst} \qquad \text{soit} \qquad P = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isobare**.

- Pour $k \to \infty$ il vient que

$$C = \frac{nR\,(k-\gamma)}{(\gamma-1)\,(k-1)} \to \frac{nRk}{(\gamma-1)k} = \frac{nR}{(\gamma-1)} = \frac{nR}{\frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V}} = \frac{nRC_V}{C_P - C_V} = \frac{nRC_V}{nR} = C_V.$$

On reconnaît la capacité thermique à volume constant, donc la transformation s'effectue à volume constant, elle est donc **isochore**, pour $k \to \infty$.
Si on étudie la relation polytropique

$$PV^k = \text{cst} \qquad \text{soit} \qquad P^{1/k}V = \text{cst} \qquad \text{soit pour } k \to \infty \qquad V = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isochore**.

- Pour $k = 1$ il vient que

$$C = \frac{nR(k-\gamma)}{(\gamma-1)(k-1)} \to \infty$$

or une capacité thermique est inversement proportionnelle à la variation de température, donc ici, la variation de température est nulle : **la transformation est isotherme**. **Un système avec une capacité thermique infinie est un système qui peut absorber n'importe quelle variation d'énergie sans faire varier sa température.**

Si on étudie la relation polytropique

$$PV = \text{cst}$$

or pour un gaz parfait $PV = nRT$ donc

$$T = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isotherme**.

3 Étude d'une résonance

Soit le circuit suivant, où $e(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation ω. On étudie l'intensité parcourant le générateur.

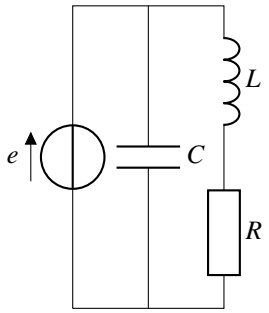


Figure 1: Schéma du circuit électrique

11. Exprimer l'impédance complexe du circuit.

L'impédance complexe du circuit $\underline{Z}_{eq}$ est

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_1}}$$

avec $\underline{Z}_1$ l'impédance équivalente de la branche contenant la bobine et le résistor

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega.$$

Ainsi

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}.$$

12. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donner l'expression de l'impédance en fonction de x, Q et R.

Il vient que

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega} = \frac{R\left(1+j\frac{L}{R}\omega\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+jR\frac{\sqrt{C}\sqrt{LC}}{\sqrt{L}}\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R\left(1+j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC}\omega\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{R\left(1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\underline{Z}_{eq} = R\frac{1+jQx}{1-x^2+j\frac{1}{Q}x}.$$

13. Établir l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera (on pourra effectuer le changement de variable $u = x^2$).

Étudions le module de l'impédance, soit

$$|\underline{Z}_{eq}| = R\frac{|1+jQx|}{\left|1-x^2+j\frac{1}{Q}x\right|} = R\frac{\sqrt{1+Q^2x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}} = R\sqrt{\frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}}.$$

Étudions la variation de l'argument de la racine en fonction de x, soit

$$g(x) = \frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}.$$

On pose $u = x^2$ et on étudie les variations de $g(x)$ par rapport à u

$$g(u) = \frac{1+Q^2u}{(1-u)^2+\frac{1}{Q^2}u}$$

$$\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{Q^2\left((1-u)^2+\frac{1}{Q^2}u\right)-\left(1+Q^2u\right)\left(-2(1-u)+\frac{1}{Q^2}\right)}{\left((1-u)^2+\frac{1}{Q^2}u\right)^2}.$$

Le dénominateur étant toujours positif, il faut étudier les conditions sur u pour que le numérateur s'annule soit,

$$g'(u) = Q^2\left((1-u)^2+\frac{1}{Q^2}u\right)-\left(1+Q^2u\right)\left(-2(1-u)+\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$$g'(u) = Q^2-2Q^2u+Q^2u^2+u+2-2u-\frac{1}{Q^2}+2Q^2u-2Q^2u^2-u = 0$$

$$g'(u) = Q^2u^2-2Q^2u^2-2Q^2u+u-2u+2Q^2u-u+Q^2+2-\frac{1}{Q^2} = 0$$

$$g'(u) = -Q^2u^2-2u+\left(2+Q^2-\frac{1}{Q^2}\right) = 0.$$

Le discriminant de cette équation du deuxième ordre est

$$\Delta = 4+4Q^2\left(2+Q^2-\frac{1}{Q^2}\right) = 4+8Q^2+4Q^4-4 = 4Q^2\left(2+Q^2\right)$$

et les solutions sont

$$u_{+,-} = \frac{2\pm 2Q\sqrt{2+Q^2}}{-2Q^2} = \frac{\mp Q\sqrt{2+Q^2}-1}{Q^2}.$$

Comme u doit être positif car $u = x^2$, seule la solution u_+ est acceptable

$$u_+ = \frac{Q\sqrt{2+Q^2}-1}{Q^2}$$

mais elle nécessite une condition sur Q, en effet le terme $Q\sqrt{2+Q^2}-1$ doit être positif donc

$$Q\sqrt{2+Q^2} > 1 \qquad \text{soit} \qquad Q^4+2Q^2-1 > 0.$$

Le déterminant de cette nouvelle équation du deuxième ordre pour Q est

$$\Delta = 4+4 = 8$$

donc l'équation précédente s'annule pour

$$Q_{+,-} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

L'équation est-elle négative entre $Q_- = -1-\sqrt{2} < 0$ et entre $Q_+ = -1+\sqrt{2} > 0$? Pour le vérifier, prenons $Q = 0$, dans ce cas il vient que

$$Q^4 + 2Q^2 - 1 = -1 < 0$$

donc l'équation est positive pour $Q < Q_- = -1-\sqrt{2}$, négative entre Q_- et $Q_+ = -1+\sqrt{2}$, et positive pour $Q > Q_+$.

Nous voulons $Q > 0$ et une valeur d'équation positive, **la condition est donc $Q > 1+\sqrt{2}$, pour que l'impédance ait un extremum.**

14. Donner l'expression de la pulsation correspondant à l'extremum.

On a montré que l'extremum de l'impédance était atteint pour

$$u_+ = \frac{Q\sqrt{2+Q^2}-1}{Q^2}$$

soit

$$x = \sqrt{\frac{1}{Q}\sqrt{2+Q^2} - \frac{1}{Q^2}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1} - \frac{1}{Q^2}}$$

soit

$$\boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1} - \frac{1}{Q^2}}.}$$

15. En étudiant les limites du module de l'impédance, en déduire qu'il s'agit d'un maximum.

Étudions le module de l'impédance

$$|\underline{Z}_{eq}| = R\sqrt{\frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2 + \frac{1}{Q^2}x^2}}.$$

Pour $\omega \ll \omega_0$, soit $x \ll 1$, il vient que

$$|\underline{Z}_{eq}| \approx R\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{Q^2}x^2}} \approx R\sqrt{\frac{1}{1}} = R.$$

Pour $\omega = \omega_0$, soit $x = 1$, il vient que

$$|\underline{Z}_{eq}| = R\sqrt{\frac{1+Q^2}{\frac{1}{Q^2}}} = R\sqrt{Q^2+Q^4} = RQ\sqrt{1+Q^2}$$

avec $Q > 1+\sqrt{2}$, donc $RQ\sqrt{1+Q^2} > R$.

Pour $\omega \gg \omega_0$, soit $x \gg 1$, il vient que

$$|\underline{Z}_{eq}| \approx R\sqrt{\frac{Q^2x^2}{x^4+\frac{1}{Q^2}x^2}} \approx R\sqrt{\frac{Q^2x^2}{x^4}} = R\sqrt{\frac{Q^2}{x^2}} \approx 0.$$

On constate que lorsque ω augmente le module de l'impédance voit sa valeur varier de R à $RQ\sqrt{1+Q^2} > R$ puis vers 0 : **le module de l'impédance est croissant puis décroissant, il y a bien passage par un maximum.**

16. Décrire l'intensité du courant parcourant le générateur.

D'après la loi d'Ohm l'intensité du courant est telle que

$$\underline{e} = \underline{Z}_{eq}\underline{i}$$

donc

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{eq}}.$$

En module il vient que

$$I_0 = \frac{E_0}{|\underline{Z}_{eq}|}$$

donc le module de l'intensité évolue de manière opposée au module de l'impédance : lorsque ω augmente, I_0 diminue jusqu'à un minimum puis est de nouveau croissant : **il y a antirésonance pour l'intensité parcourant le générateur**.

17. Dans le cas où le facteur de qualité Q est grand, donner les expressions approchées de la pulsation de résonance en impédance et de la valeur correspondante du maximum de $|\underline{Z}|$.

On a montré que

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1} - \frac{1}{Q^2}}$$

pour $Q \gg 1$ il vient que

$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{\sqrt{1} - \frac{1}{Q^2}}$$

$$\boxed{\omega \approx \omega_0.}$$

On a montré plus tôt que pour $\omega = \omega_0$ il vient que

$$|\underline{Z}_{eq}| = RQ\sqrt{1+Q^2}$$

donc pour $Q \gg 1$

$$\boxed{|\underline{Z}_{eq}| \approx RQ^2.}$$

4 Problème ouvert

Lors d'une expérience, on met en contact un bloc de métal de masse $1{,}0\,\mathrm{kg}$ avec un système de chauffage électrique. Lors d'une première expérience, on chauffe le bloc pendant 10 minutes. La puissance reçue par le bloc est constante. La température initiale du bloc est de $22\,^\circ\mathrm{C}$ et la température finale est de $40\,^\circ\mathrm{C}$. On répète le même protocole expérimental, mais pendant 15 minutes avec une température initiale de $19\,^\circ\mathrm{C}$.

Quelle est la température finale du bloc de métal ?

On a affaire à une transformation monobare d'une phase condensée indilatable et incompressible. On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique impliquant l'enthalpie, soit

$$\Delta H = Q + W_{dif}$$

avec W_{dif} le travail des forces différentes des forces de pression. Ici il n'y a aucune forces différentes des forces de pression, donc

$$\Delta H = Q.$$

Le transfert thermique Q provient seulement de la puissance $\mathscr{P}$ constante fournie telle que

$$Q = \mathscr{P}\Delta t$$

avec Δt, la durée du transfert thermique.

De plus, ayant affaire à une phase condensée indilatable et incompressible, nous savons que la varaition d'enthalpie du système est telle que

$$\Delta H = C_P \Delta T.$$

Ainsi à chaque transformation la relation suivante est respectée

$$C_P \Delta T = \mathscr{P} \Delta t$$

ou

$$\frac{C_P}{\mathscr{P}} = \frac{\Delta t}{\Delta T}.$$

La capacité thermique à pression constante étant considérée constante, et la puissance transmise étant constante, on voit que pour n'importe quelle transformation le rapport variation de température sur durée est aussi constant, donc

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta T_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta T_2}$$

avec l'indice 1 correspondant à la transformation 1, et l'indice 2 à la transformation 2.

Nous recherchons la température finale de la transformation 2, donc

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta T_1} = \frac{\Delta t_2}{T_i - T_f}$$

$$T_f = T_i + \Delta t_2 \frac{\Delta T_1}{\Delta t_1}.$$

A.N.

$$T_f = 19\,^\circ\mathrm{C} + 15\,\mathrm{min}\frac{40\,^\circ\mathrm{C} - 22\,^\circ\mathrm{C}}{10\,\mathrm{min}} = 46\,^\circ\mathrm{C}.$$

FIN DU SUJET