

Concours blanc

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **4 parties indépendantes**.
- Les calculatrices **sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Identités trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad ; \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

- $10^{-6/20} = \frac{1}{2}$.

1 La chasse au péritio

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytions), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 1, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en $x = 0$, P une plaque métallique placée en $x = D = 46\text{cm}$, A une antenne placée en $x = d$ reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle E_{\text{tot}}^2 \rangle$ du champ électromagnétique émis par E et de valeur $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$ au niveau de l'antenne A.

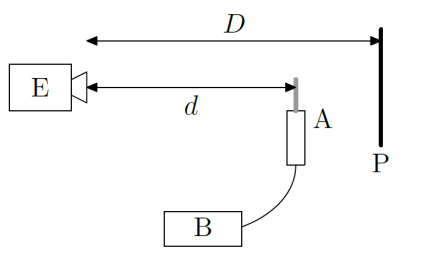


Figure 1: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position $x = d$ entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 2.

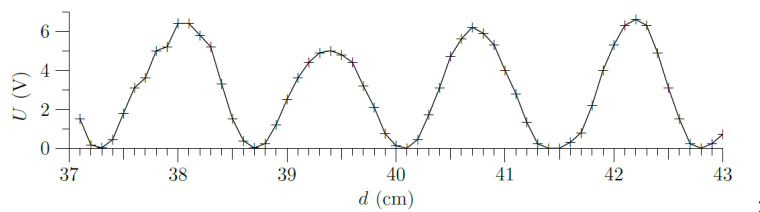


Figure 2: Tension U en fonction de la distance $x = d$ entre l'antenne et l'émetteur.

1. Une partie de l'onde est réfléchiée par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchiée vers les x négatifs. Vérifier qu'en $x = D$ l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.
2. L'onde réfléchiée a en réalité une amplitude égale à $-E_0$ et pas E_0 , car la réflexion implique un déphasage de π . Exprimer la valeur du champ électromagnétique total E_{tot} dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.
3. Déterminer la condition sur x pour que E_{tot} s'annule.
4. Déterminer l'écart entre deux position x consécutives pour lesquelles E_{tot} s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 2 la valeur de la fréquence f de l'onde électromagnétique.

2 L'accordeur de guitare

Adapté du concours CCS TSI (2019)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences f_{ac} (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.

- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la Figure 3.

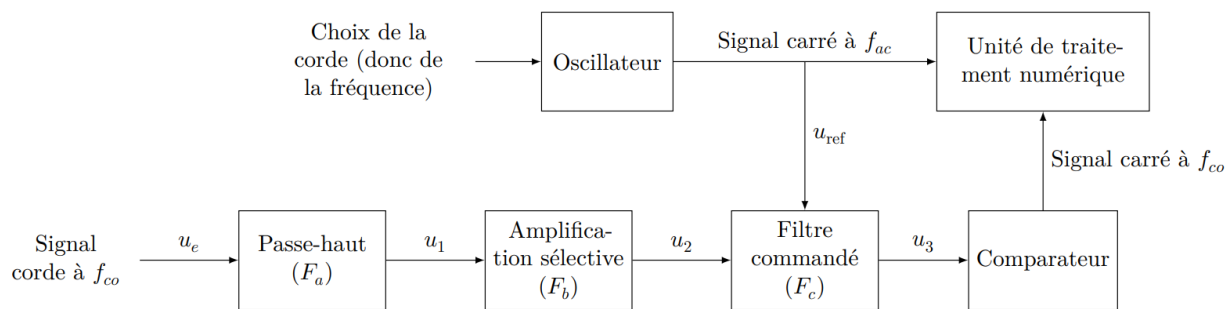


Figure 3: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

2.1 Le signal

La Figure 4 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

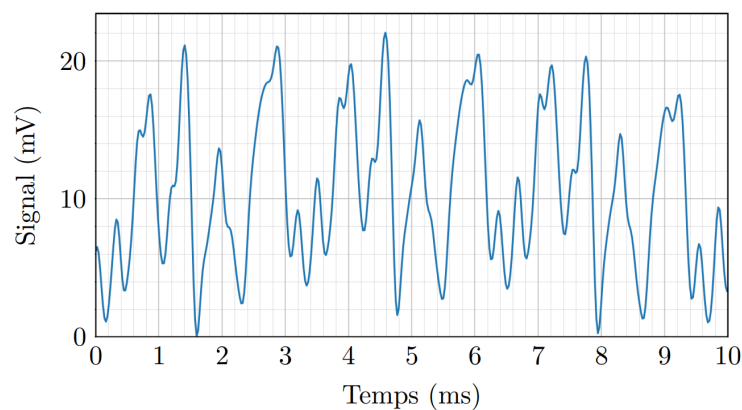


Figure 4: Signal de la guitare

- Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
- Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
- De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

2.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 5 (filtre (F_a)).

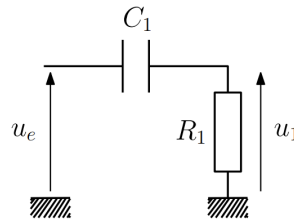


Figure 5: Filtre (F_a)

9. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
10. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
11. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
12. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

2.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} .

2.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 6 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

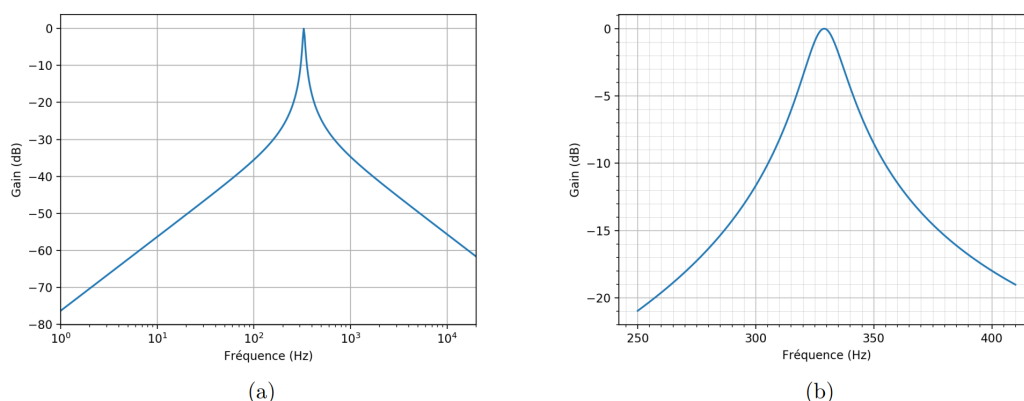


Figure 6: Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

13. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
14. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

15. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

2.3.2 Analyse spectrale

La Figure 7 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la Figure 4.

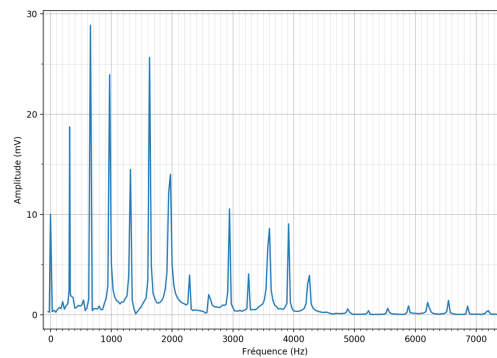


Figure 7: Spectre du signal d'entrée u_e

16. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 4.
17. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 8 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
18. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

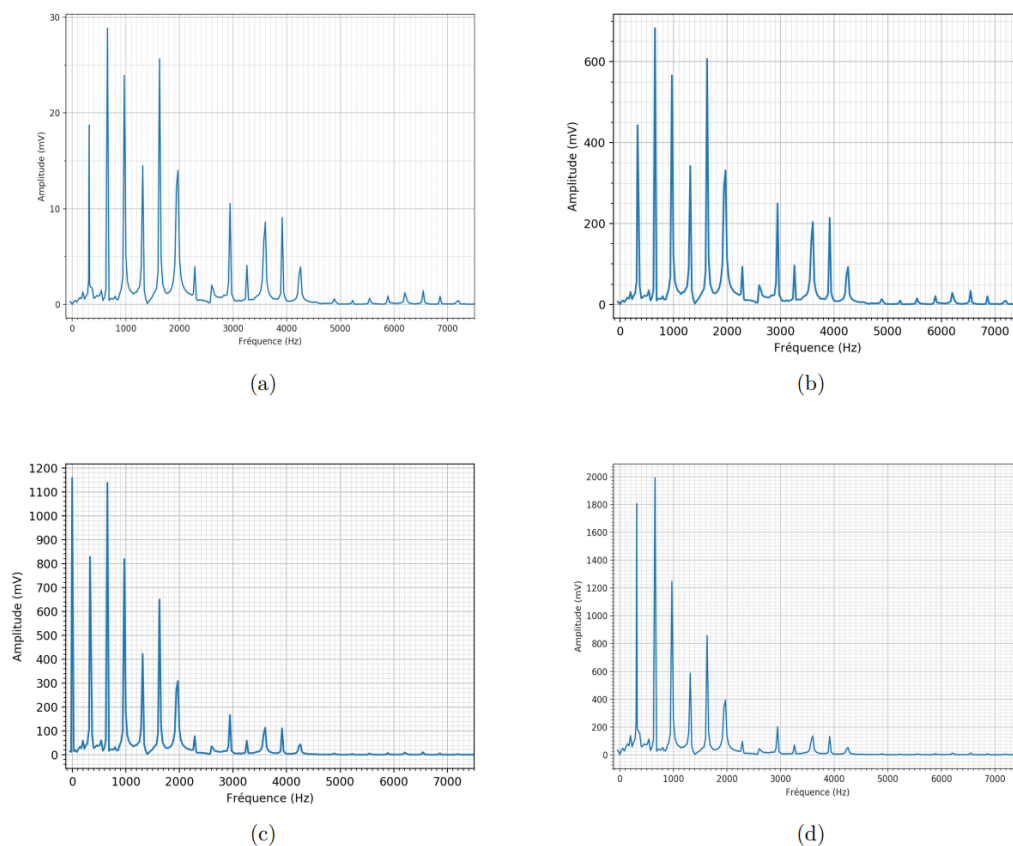


Figure 8: Spectres

3 Toboggan aquatique

Adapté du concours EPITA-IPSA-ESME - MP, MPI, PC, PT et TSI (2023)

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

3.1 Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la Figure 9. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

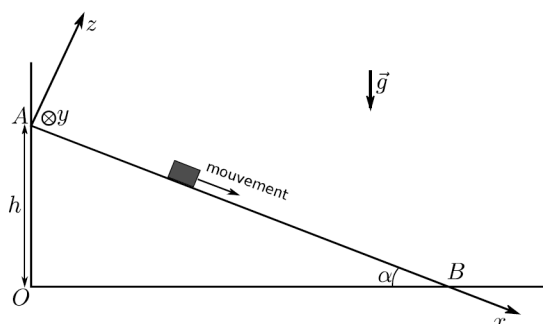


Figure 9: Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France $h = 33\text{ m}$ et $\alpha \approx 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

19. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92\text{ km/h}$.

20. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la Figure 9 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

21. À l'aide du principe fondamental de la dynamique (auss appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .
22. Exprimer le travail de la force $\vec{R}$, pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .
23. À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

24. La Figure 10 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

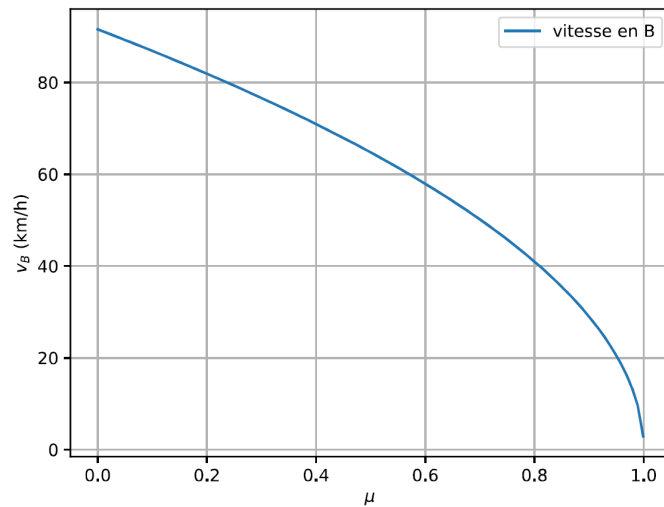


Figure 10: Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

25. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

3.2 Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

3.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la Figure 11. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la Figure 11, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

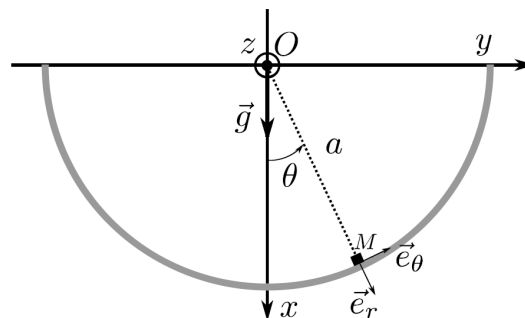


Figure 11: Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grise). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

26. Donner l'expression du moment cinétique L_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
27. Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .
28. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.

29. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.

Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

30. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

31. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

3.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté Figure 12. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (Figure 12, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan Oxy , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids $\vec{P}$, à $\vec{F}$, et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan (on néglige tout frottement).

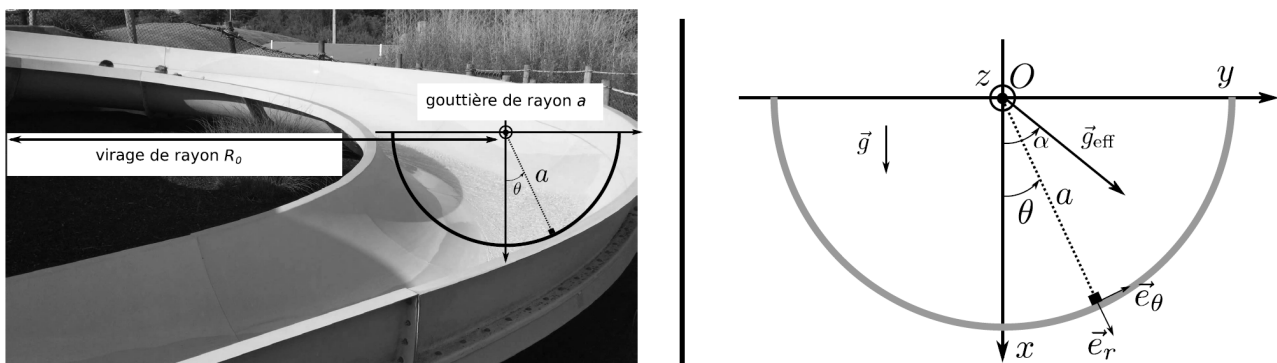


Figure 12: Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

32. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .

33. Donner également l'expression de l'angle α : entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

34. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous partie 3.2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.

Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

4 Fibre optique - Approche géométrique

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2011)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la Figure 13 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox) , de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .

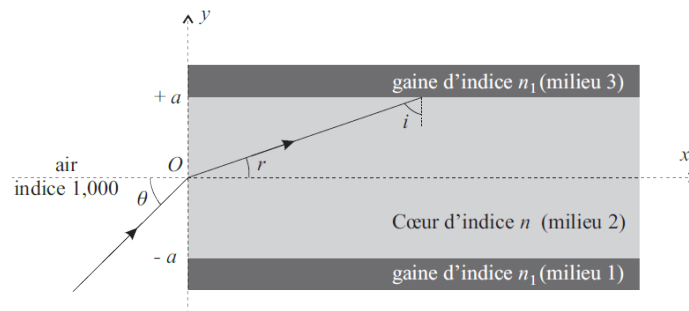


Figure 13: Fibre optique en coupe.

35. Les différents angles utiles sont représentés sur la Figure 13. À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_l l'angle d'incidence limite.
36. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_l . En déduire l'expression de l'ouverture numérique $O.N. = \sin \theta_l$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.
On considère une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_l . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.
37. Pour quelles valeurs de l'angle θ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal et maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n et n_1 .

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_l . La Figure 14 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

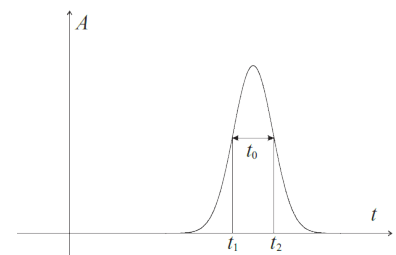


Figure 14: Impulsion lumineuse.

38. Reproduire la Figure 14 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?
Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F .
39. En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?
Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{max} \cdot F$.
40. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n et n_1 .

FIN DU SUJET