Travaux dirigés

Chapitre 5 - Mécanique du point

TD I. Cinématique du point

Exercice I.1. Test d'accélération d'une voiture ★

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

1. Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180$ m. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.
2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une déccélérration de 7 m.s^{-2}.

Exercice I.2. Courses entre deux véhicules radio-commandés ★

Deux modèles réduits de voitures radio-commandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de 4,0 m.s^{-2}, le second de 5,0 m.s^{-2}. Cependant l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer 1,0 s avant le second.

1. À partir de l'expression des accélérations des voitures, **exprimer** leur vitesse puis leur position en fonction du temps.
2. **Déterminer** le temps nécessaire au deuxième véhicule pour rattraper l'autre.
3. Les deux modèles réduits participent à des courses de 100 m et 200 m. **Déterminer** s'il est possible que le perdant du 100 m prenne sa revanche au 200 m.
4. **Calculer** pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

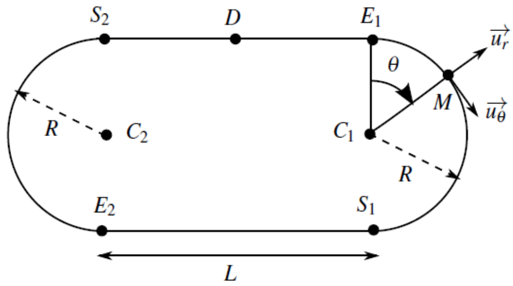
Exercice I.3. Électron dans le modèle atomique de Bohr ★ ★

Le modèle de Bohr est un modèle planétaie semi-classique de l'atome d'hydrogène. On rappelle que l'atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron. Dans le modèle de Bohr, l'électron a une trajectoire circulaire et uniforme autour du proton de rayon $a_0 = 0,56.10^{-10}$ m. La fréquence de révolution de l'électron est égale à $f = 6,6.10^{15}$ Hz.

1. **Choisir** un système de coordonnées adapté et **exprimer** le vecteur position de l'électron. **Représenter** le vecteur dans la base choisie.
2. **Déterminer** la vitesse de l'électron sur sa trajectoire et **calculer** sa norme. **Représenter** le vecteur dans la base choisie.
3. **Déterminer** l'accélération de l'électron et **calculer** sa valeur. **Représenter** le vecteur dans la base choisie.

Exercice I.4. Parcours d'un cycliste sur un vélodrome ★ ★

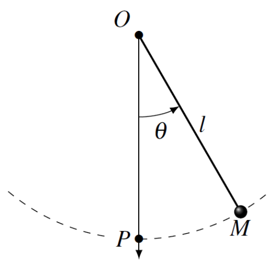
On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point matériel M, qui s'entraîne sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles reliées par deux lignes droites tel que $L = 62$ m et $R = 20$ m. Le cycliste part de D avec une vitesse nulle.



1. Le cycliste exerce un effort constant ce qui se traduit par une accélération constante a_1 jusqu'à l'entrée E_1 du premier virage. **Calculer** le temps t_{E_1} de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E_1} en fonction de a_1 et L.
2. Dans le premier virage, le cycliste a une accélération tangentielle (suivant $\overrightarrow{u_\theta}$) constante et de valeur égale à a_1. **Déterminer** le temps t_{S_1} de passage en S_1 ainsi que la vitesse v_{S_1} en fonction de a_1, L et R.
3. De même, en considérant l'accélération tangentielle constante tout au long du premier tour et de valeur égale à a_1, déterminer les temps t_{E_2}, t_{S_2} et t_D (après un tour), ainsi que les vitesses correspondantes.
4. La course s'effectue sur quatre tours (1 km) mais on ne s'intéresse donc qu'au premier effectué en $t_1 = 18,155$ s (Temps du britannique Chris Hoy aux Championnats du monde de 2007). **Déterminer** la valeur de l'accélération a_1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est d'environ 60 km.h^{-1}. **Déterminer** ce qu'on doit modifier dans le modèle pour qu'il se rapproche de la réalité.

Exercice I.5. Étude cinématique du pendule simple ★ ★

Le mouvement d'un point M accroché à un fil de longueur l dont l'autre extrémité est fixée en un point O s'inscrit sur une portion de cercle de centre O et de rayon l. On repère alors le point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ par sa coordonnée angulaire θ définie sur la figure ci-après et on observe des oscillations pendulaires. Lorsque les oscillations sont de faibles amplitudes, on observe que l'angle polaire θ est tel que $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$ en choisissant pour origine des temps l'instant où M passe au point P.



1. **Définir** sur un schéma la base locale de projection polaire. Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération sur cette base.
2. **Définir** la base cartésienne de projection et donner l'expression du vecteur position sur cette base.
3. Lorsque $\theta_0 << \frac{\pi}{2}$, on a $\theta(t) << \frac{\pi}{2}$ à tout instant et on peut utiliser les approximations suivantes : $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$.

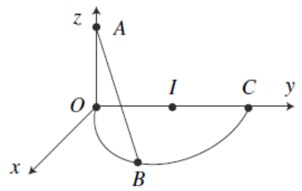
   Dans ces conditions, **déterminer** les composantes des vecteurs vitesses et accélération en coordonnées cartésiennes.
4. En changeant l'origine du repère cartésien pour la placer en P, montrer que l'on obtient alors une relation remarquable entre les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{a}$. **Rappeler** à quoi correspond cette équation.

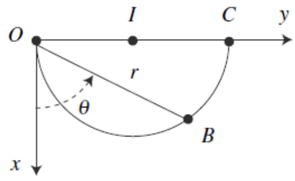
Exercice I.6. Mouvement de l'extrémité d'une barre, d'après ENAC 2003 ★ ★ ★

Dans le référentiel $\mathscr{R}$ de repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ défini sur les figures ci-dessous, une barre rectiligne AB de longueur $2b$ se déplace de sorte que :

— son extrémité A se trouve sur le demi-axe positif (Oz)

— son extrémité B décrit le demi-cercle du plan (xOy) de centre $I(0, b, 0)$ et de rayon b, à la vitesse angulaire ω constante et positive. à l'instant $t = 0$, B se trouve en O.





1. **Déterminer** la durée Δt du mouvement.
2. On note φ l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$, **déterminer** une relation simple entre φ et θ.
3. **Établir** les expressions des coordonnées polaires ρ et θ de B au cours du temps t.
4. **Déterminer** l'angle $\alpha = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ en fonction de ω et t.
5. **Décrire** le mouvement de la barre entre l'instant initial et l'instant final.
6. **Calculer** les coordonnées cartésiennes X, Y et Z du milieu J de la barre.
7. **Déterminer** la vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'accélération $\overrightarrow{a}$ de J, ainsi que leurs normes.

Correction

Exercice I.1. Test d'accélération d'une voiture ★

1. Le mouvement est rectiligne uniforme à accélération constante (en norme, direction et sens) noté $\overrightarrow{a_0}$. On choisit un axe (Ox) comme axe du mouvement et le point O comme point de départ du test, ainsi

$$\overrightarrow{a_0} = a_0 \overrightarrow{u_x}.$$

En intégrant l'accélération par rapport au temps, on obtient la vitesse de la voiture

$$\vec{v} = \int \overrightarrow{a_0} \mathrm{d}t = \left(a_0 \int \mathrm{d}t\right) \overrightarrow{u_x}$$
$$\vec{v} = (a_0 t + C_1)\, \overrightarrow{u_x}$$

avec C_1 une constante d'intégration qui correspond à la valeur de la vitesse à l'instant initiale $v(t=0)$. D'après l'énoncé $v(t=0) = 0$ donc $C_1 = 0$, ainsi

$$\vec{v} = a_0 t \overrightarrow{u_x}.$$

En intégrant la vitesse par rapport au temps, on obtient le vecteur position de la voiture

$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{v} \mathrm{d}t = \left(a_0 \int t \mathrm{d}t\right) \overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{OM} = \left(a_0 \frac{t^2}{2} + C_2\right) \overrightarrow{u_x}$$

avec C_2 une constante d'intégration qui correspond à la valeur de la position à l'instant initiale $x(t=0)$. On choisit $x(t=0) = 0$ comme position initiale donc $C_2 = 0$, ainsi

$$\overrightarrow{OM} = a_0 \frac{t^2}{2} \overrightarrow{u_x}.$$

À partir de l'expression du vecteur position on peut déterminer la valeur de l'accélération de la voiture. Il vient que

$$x\overrightarrow{u_x} = a_0 \frac{t^2}{2} \overrightarrow{u_x}$$
$$x = a_0 \frac{t^2}{2}$$
$$a_0 = \frac{2x}{t^2}.$$

A.N.

$$\boxed{a_0 = \frac{2D}{t^2} = \frac{2 \times 180 \text{ m}}{(26,6 \text{ s})^2} = 0,509 \text{ m.s}^{-2}.}$$

Pour obtenir la valeur de la vitesse atteinte à la distance D on utilise l'expression de la vitesse obtenue plus tôt $\vec{v} = a_0 t \overrightarrow{u_x}$.

A.N.

$$\boxed{v = a_0 t = \frac{2D}{t^2} \times t = \frac{2 \times 180 \text{ m}}{(26,6 \text{ s})^2} \times 26,6 \text{ s} = 13,5 \text{ m.s}^{-1}.}$$

2. On considère qu'après avoir atteint la vitesse précédente au bout d'une distance D la voiture décélère, donc a une accélération négative qui est ici constante, soit $\overrightarrow{a_1} = a_1 \overrightarrow{u_x} = -7$ m.s^{-2}.
En intégrant l'accélération par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse de la voiture

$$\vec{v} = \int \overrightarrow{a_1} \mathrm{d}t = \left(a_1 \int \mathrm{d}t \right) \overrightarrow{u_x}$$
$$\vec{v} = (a_1 t + C_3) \overrightarrow{u_x}$$

avec C_3 une constante d'intégration qui correspond à la valeur de la vitesse à l'instant où commence la décélération $v(x = D)$. D'après l'énoncé $v(x = D) =$ m.s^{-1} donc $C_3 = v_D = 13,5$ m.s^{-1}.
En intégrant la vitesse par rapport au temps, on obtient le vecteur position de la voiture

$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{v} \mathrm{d}t = \left(\int (a_1 t + v_D) \mathrm{d}t \right) \overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{OM} = \left(a_1 \frac{t^2}{2} + v_D t + C_4 \right) \overrightarrow{u_x}$$

avec C_4 une constante d'intégration qui correspond à la valeur de la position à l'instant où commence la décélération $x = D$.Ainsi

$$\overrightarrow{OM} = \left(a_1 \frac{t^2}{2} + v_D t + D \right) \overrightarrow{u_x}.$$

Nous savons que la voiture s'arrête lorsque la vitesse est nulle, donc nous pouvons obtenir la valeur de l'instant à laquelle elle s'arrête à partir de l'expression de la vitesse $v(t)$.

$$a_1 t + v_D = 0$$
$$t = -\frac{v_D}{a_1}.$$

Connaissant la valeur de l'instant de l'arrêt, on peut obtenir la valeur de la position d'arrêt à partir de l'expression de la position $x(t)$.

$$x = a_1 \frac{t^2}{2} + v_D t + D$$
$$x = a_1 \frac{1}{2} \frac{v_D^2}{a_1^2} - v_D \frac{v_D}{a_1} + D = \frac{1}{2} \frac{v_D^2}{a_1} - \frac{v_D^2}{a_1} + D = -\frac{1}{2} \frac{v_D^2}{a_1} + D.$$

La distance d'arrêt, notée D_a, est la différence entre la position d'arrêt et la position où la décélération soit

$$D_a = x - D = -\frac{1}{2} \frac{v_D^2}{a_1}.$$

A.N.

$$\boxed{D_a = -\frac{1}{2} \frac{v_D^2}{a_1} = -\frac{1}{2} \frac{\left(13,5 \text{ m.s}^{-1}\right)^2}{\left(-7 \text{ m.s}^{-2}\right)} = 13,0 \text{ m.}}$$

Exercice I.2. Courses entre deux véhicules radio-commandés ★

1. On considère que le mouvements des voitures est rectiligne selon un axe (Ox). Leur vecteur accélération est selon cet axe. On peut alors obtenir l'expression de la coordonnées x de la voiture au cours du temps en intégrant deux fois par rapport au temps l'accélération, soit

$$v_x = \int_{t_0}^{t} a \mathrm{d}t'$$
$$v_x = a(t - t_0)$$

avec t' une variable d'intégration temporelle, t_0 l'instant initial du début du mouvement de chaque voiture et t l'instant auquel on étudie le mouvement. Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \int_{t_0}^{t} v_x \mathrm{d}t' \\ x &= \int_{t_0}^{t} a\left(t' - t_0\right) \mathrm{d}t' \\ x &= \frac{1}{2}a\left[(t-t_0)^2 - (t_0-t_0)^2\right] \\ x &= \frac{1}{2}a\left(t-t_0\right)^2. \end{aligned}$$

Pour la première voiture l'accélération est $a_1 = 4{,}0$ m.s^{-2} et l'instant initial est $t_{0,1} = -1$ s, ainsi

$$\boxed{v_1(t) = a_1\left(t - t_{0,1}\right)}$$

$$\boxed{x_1(t) = \frac{1}{2}a_1\left(t - t_{0,1}\right)^2.}$$

Pour la deuxième voiture l'accélération est $a_2 = 5{,}0$ m.s^{-2} et l'instant initial est $t_{0,2} = 0$ s, ainsi

$$\boxed{v_2(t) = a_2 t}$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2.}$$

2. Le deuxième véhicule rattrape le premier lorsqu'elles sont à la même position, soit

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ \frac{1}{2}a_1\left(t-t_{0,1}\right)^2 &= \frac{1}{2}a_2 t^2 \\ (a_1 - a_2)t^2 - 2a_1 t_{0,1} t + a_1 t_{0,1}^2 &= 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4a_1^2 t_{0,1}^2 - 4a_1 t_{0,1}^2 (a_1 - a_2) = 4a_1^2 t_{0,1}^2 - 4a_1^2 t_{0,1}^2 + 4a_1 a_2 t_{0,1}^2 = 4a_1 a_2 t_{0,1}^2$, les solution sont donc

$$t = \frac{2a_1 t_{0,1} \pm 2t_{0,1}\sqrt{a_1 a_2}}{2(a_1 - a_2)} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1 a_2}}{(a_1 - a_2)} t_{0,1}.$$

A.N.

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{a_1 t_{0,1} + t_{0,1}\sqrt{a_1 a_2}}{(a_1 - a_2)} \\ t_+ &= \frac{4 + \sqrt{4 \times 5}}{(4-5)}(-1) = 8{,}5 \text{ s}. \end{aligned}$$

$$t_- = \frac{a_1 t_{0,1} + t_{0,1}\sqrt{a_1 a_2}}{(a_1 - a_2)}$$
$$t_- = \frac{4 - \sqrt{4 \times 5}}{(4-5)}(-1) = -0,5 \text{ s.}$$

La seule solution est la première : **il faut 8,5 s à la deuxième voiture pour rattraper la première**.

3. Vérifions quelle est la position à laquelle la deuxième voiture rattrape la première. On sait que l'instant pour lequel cela arrive est $t = 8,5$ s. Si on reporte cette valeur dans l'une ou l'autre des équations horaires du mouvement des voitures, il vient que **A.N.**

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 = \frac{1}{2}5\,(8,5)^2 = 1,8.10^2 \text{ m.}}$$

Ainsi la deuxième voiture ne peut pas gagner sur une course de 100 m, mais gagne sur une course de 200 m.

4. Pour les deux voitures, l'instant final t_f est tel que

$$x_f = \frac{1}{2}a\,(t_f - t_0)^2$$

soit

$$t_f = \sqrt{\frac{2x_f}{a}} + t_0.$$

Ainsi la vitesse final v_f est

$$v_f = a\,(t_f - t_0) = a\sqrt{\frac{2x_f}{a}} = \sqrt{2x_f a}.$$

Ainsi **A.N.**

$$v_{f,1}(100 \text{ m}) = \sqrt{2 \times 100 \times 4} = 28 \text{ m.s}^{-1}.$$
$$v_{f,1}(200 \text{ m}) = \sqrt{2 \times 200 \times 4} = 40 \text{ m.s}^{-1}.$$
$$v_{f,2}(100 \text{ m}) = \sqrt{2 \times 100 \times 5} = 32 \text{ m.s}^{-1}.$$
$$v_{f,2}(200 \text{ m}) = \sqrt{2 \times 200 \times 5} = 45 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice I.3. Électron dans le modèle atomique de Bohr ⋆ ⋆

1. La trajectoire du système étant circulaire et uniforme, on choisit le système de coordonnées polaire. Le vecteur position de l'électron, considéré comme un point matériel M, dans ce système est

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = a_0 \overrightarrow{u_\rho}}$$

avec a_0 le rayon de la trajectoire.

2. On exprime la vitesse de l'électron à partir de la dérivée temporelle du vecteur position, soi

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_\rho} + a_0 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\rho}}{\mathrm{d}t}$$

comme le rayon a_0 est constant, il vient que

$$\overrightarrow{v} = a_0 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\rho}}{\mathrm{d}t} = a_0 \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

avec $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire de l'électron.
Or la fréquence de révolution de l'électron et la vitesse angulaire sont liées de telle manière que

$$\omega = 2\pi f$$

donc

$$\overrightarrow{v} = 2\pi a_0 f \overrightarrow{u_\theta}.$$

La norme de la vitesse est donc **A.N.**

$$\boxed{||\overrightarrow{v}|| = 2\pi a_0 f = 2\pi \times 0,56.10^{-10} \times 6,6.10^{-15} = 2,2.10^{6} \text{ m.s}^{-1}.}$$

3. On exprime l'accélération de l'électron à partir de la dérivée temporelle du vecteur position, soi

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = 2\pi a_0 f \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -2\pi a_0 f \dot{\theta} \overrightarrow{u_\rho} = -4\pi^2 a_0 f^2 \overrightarrow{u_\rho}.$$

La valeur de l'accélératione est donc

$$\boxed{a = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u_\rho} = -4\pi^2 a_0 f^2 = -4\pi^2 \times 0,56.10^{-10} \times \left(6,6.10^{-15}\right)^2 = -9,6.10^{22} \text{ m.s}^{-2}.}$$

Exercice I.5. Étude cinématique du pendule simple ★ ★

Voir cours.

Exercice I.6. Mouvement de l'extrémité d'une barre, d'après ENAC 2003 ★ ★ ★

1. Le point B a un mouvement circulaire uniforme de centre I. Il décrit donc un tour en une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec ω la vitesse angulaire du point B. Ainsi un demi-tour de O à C est effectué pendant une durée $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.

2. On constante que le triangle OIB est un triangle isocèle : les côtés IO et IB correspondent à des rayons du cercle de centre I. Ainsi $\widehat{IOB} = \widehat{IBO}$ et on note cet angle $\beta = \widehat{IOB} = \widehat{IBO}$.
Dans un triangle la somme des angles est égale à π donc

$$\begin{aligned} \widehat{IOB} + \widehat{IBO} + \widehat{OIB} &= \pi \\ \beta + \beta + \varphi &= \pi \\ \varphi &= \pi - 2\beta. \end{aligned}$$

De plus, on peut voir sur la figure que la somme des angle θ et $\widehat{IOB}$ est égale à $\pi/2$, donc

$$\begin{aligned} \widehat{IOB} + \theta &= \frac{\pi}{2} \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - \theta. \end{aligned}$$

Nous pouvons introduire cette relation dans l'expression de φ

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi - 2\beta \\ \varphi &= \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = 2\theta.}$$

3. L'angle φ ou $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB})$ ou $\widehat{OIB}$ est l'angle du mouvement circulaire de B dans le cercle de centre I par rapport à l'axe (Oy) (dans le sens des $y < 0$).
La vitesse angulaire de B dans le cercle de centre I est ω constante, donc la relation entre φ et ω est

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{cst}.$$

En intégrant cette relation on obtient l'expression de φ au cours du temps, soit

$$\int \omega \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$\varphi = \omega t + C$$

avec C une constante d'intégration qui correspond à la valeur φ à l'instant initiale $t = 0$, or à $t = 0$ le point B se trouve en O donc $C = \varphi(t = 0) = 0$, donc $\varphi = \omega t$.
D'après la relation entre φ et θ obtenue plus tôt

$$\varphi = 2\theta$$
$$\theta = \frac{\varphi}{2}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\omega t}{2}.}$$

La coordonnées polaires ρ correspond à r sur la figure. On peut décomposer le triangle OIB en deux triangles rectangles OIC et CIB avec C le milieu du segment OB.
Dans le triangle OIC il vient que

$$\sin \widehat{OIC} = \frac{OC}{OI}$$
$$\sin \frac{\widehat{OIB}}{2} = \frac{r/2}{b}$$
$$\sin \varphi 2 = \frac{r/2}{b}$$
$$\sin \omega t 2 = \frac{r/2}{b}$$

$$\boxed{r(t) = 2b \sin \frac{\omega t}{2}.}$$

4. Dans la base cylindrique les coordonnées du point A sont $(0, 0, z(t)$. Si on étudie le triangle AOB on peut exprimer $z(t)$ en fonction du côté OB et de l'angle $\widehat{OAB}$ noté α dans l'énoncé, ainsi

$$\cos \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{z(t)}{2b} = \frac{z(t)}{2b}$$

$$z(t) = 2b\cos\alpha.$$

Si on considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de norme constante $2b$, on peut exprimer ses composantes dans la base cylindrique à partir des composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = -z(t)\overrightarrow{u_z} + r(t)\overrightarrow{u_\rho}$$

$$\overrightarrow{AB} = -2b\cos\alpha\overrightarrow{u_z} + 2b\sin\frac{\omega t}{2}\overrightarrow{u_\rho}.$$

Comme la norme de $\overrightarrow{AB}$ est constante

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\left(2b\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2 + (-2b\cos\alpha)^2}$$

$$2b = \sqrt{4b^2\sin^2\frac{\omega t}{2} + 4b^2\cos^2\alpha}$$

$$4b^2 = 4b^2\sin^2\frac{\omega t}{2} + 4b^2\cos^2\alpha$$

$$4b^2\cos^2\alpha = 4b^2 - 4b^2\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\frac{\omega t}{2} = \cos^2\frac{\omega t}{2} + \sin^2\frac{\omega t}{2} - \sin^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

et comme $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ il vient que

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega t}{2}.}$$

5. À l'instant initiale, la barre est alignée avec l'axe (Oz) puis le point B décrit un demi-cercle de centre I pendant que le point A, toujours sur l'axe (Oz), voit son altitude diminuée jusqu'à atteindre l'origine O. À l'instant final, le point B est alors sur l'axe (Oy) et la barre est alignée avec cet axe.

6. Les coordonnées cartésiennes du milieu de la barre J s'obtiennent à partir des coordonnées cartésiennes de A et B.
Pour le point A les coordonnées cylindriques sont

$$\begin{cases} \rho &= 0 \\ \theta &= 0 \\ z &= 2b\cos\alpha = 2b\cos\frac{\omega t}{2} \end{cases}$$

les coordonnées cartésiennes sont donc les mêmes

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 2b\cos\alpha = 2b\cos\frac{\omega t}{2}. \end{cases}$$

Pour le point B les coordonnées cylindriques sont

$$\begin{cases} \rho & = 2b\sin\frac{\omega t}{2} \\ \theta & = \theta \\ z & = 0 \end{cases}$$

les coordonnées cartésiennes sont donc

$$\begin{cases} x & = \rho\cos\theta = 2b\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} = b\sin(\omega t) \\ y & = \rho\sin\theta = 2b\sin\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2} = 2b\sin^2\frac{\omega t}{2} \\ z & = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes du point J sont égales aux moyennes des coordonnées cartésiennes des points A et B, soit

$$\begin{cases} X & = \frac{b}{2}\sin(\omega t) \\ Y & = b\sin^2\frac{\omega t}{2} \\ Z & = b\cos\frac{\omega t}{2}. \end{cases}$$

7. Dans le cas du repère cartésien, les coordonnées d'un point correspondent aux composantes de son vecteur position, ainsi pour obtenir les composantes de la vitesse $\overrightarrow{v}$ du point J il suffit de dériver les coordonnées par rapport aux temps, soit

$$\overrightarrow{v} = \begin{cases} \dot{X} & = \frac{1}{2}\omega b\cos(\omega t) \\ \dot{Y} & = \omega b\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}\omega b\sin(\omega t) \\ \dot{Z} & = -\frac{1}{2}\omega b\sin\frac{\omega t}{2}. \end{cases}$$

La norme de la vitesse est donc

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}$$
$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\frac{1}{4}\omega^2b^2\cos^2(\omega t)+\frac{1}{4}\omega^2b^2\sin^2(\omega t)+\frac{1}{4}\omega^2b^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\frac{1}{4}\omega^2b^2+\frac{1}{4}\omega^2b^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$||\overrightarrow{v}|| = \frac{1}{2}\omega b\sqrt{1+\sin^2\frac{\omega t}{2}}.$$

Les composantes de l'accélération $\overrightarrow{a}$ sont donc

$$\overrightarrow{a} = \begin{cases} \ddot{X} & = -\frac{1}{2}\omega^2b\sin(\omega t) \\ \ddot{Y} & = \frac{1}{2}\omega^2b\cos(\omega t) \\ \ddot{Z} & = -\frac{1}{4}\omega^2b\cos\frac{\omega t}{2}. \end{cases}$$

La norme de l'accélération est donc

$$||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\ddot{X}^2+\ddot{Y}^2+\ddot{Z}^2}$$
$$||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\frac{1}{4}\omega^4b^2\sin^2(\omega t)+\frac{1}{4}\omega^4b^2\cos^2(\omega t)+\frac{1}{16}\omega^4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$||\overrightarrow{a}|| = \sqrt{\frac{1}{4}\omega^4b^2+\frac{1}{16}\omega^4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$||\overrightarrow{a}|| = \frac{1}{2}\omega^2b\sqrt{1+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$