

### TD III. Énergétique du point

#### Exercice III.1. Travail d'une force de frottements fluides ★

Un point matériel  $M$  est animé d'un mouvement sinusoïdal le long d'un axe  $(Ox)$ , d'amplitude  $x_0$  et de fréquence  $\nu$ . Il subit l'action d'une force de frottement fluide  $\vec{f} = -k_1 \vec{v}$ .

1. **Donner** l'équation horaire du mouvement de  $M$ .
2. **Déduire** l'expression de sa vitesse  $\vec{v}$  en fonction du temps.
3. À partir de la valeur de la vitesse, **exprimer** la différentielle  $dx$  en fonction de la différentielle  $dt$ .
4. **Déterminer** le travail de  $\vec{f}$  au cours d'une période du mouvement (on pourra utiliser une relation trigonométrique pour transformer  $\sin^2$  en une somme de deux cos).

#### Exercice III.2. Distance de freinage ★

Une voiture de masse  $m = 1,5 \cdot 10^3$  kg roule à la vitesse de  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur freine brusquement et s'arrête après avoir parcouru une distance  $d = 15$  m. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. **Calculer** le travail de la force de freinage.
2. **En déduire** la norme de cette force.
3. **Déterminer** la distance de freinage si la vitesse initiale est de  $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .
4. **Commenter** cette phrase relevée dans livret d'apprentissage de la conduite : "La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile".

#### Exercice III.3. Le Marsupilami ★ ★

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui peut se comporter comme un ressort et qui permet au Marsupilami de se propulser vers le haut.

On considère le marsupilami comme un point matériel  $m = 50$  kg et sa queue comme un ressort. On note  $l = 2,0$  m la longueur à vide ce ressort et  $k$  sa constante de raideur. On prendra  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

On étudie un saut du Marsupilami. À l'instant initial  $t_0$  le ressort est comprimé et a une longueur  $l_m = 50$  cm. À un instant ultérieur  $t_1$  la longueur du ressort est  $l_0$ , à cet instant le Marsupilami quitte le sol. À un autre instant ultérieur  $t_2$ , le Marsupilami atteint une hauteur maximale de  $h$ .

1. **Faire** le bilan des forces qui s'exerce sur le Marsupilami. **Déterminer** si ces forces sont conservatives.
2. **Utiliser** le théorème adapté aux instant  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ .
3. La hauteur maximale atteinte par le Marsupilami est  $h = 10$  m. **Déterminer** la valeur de  $k$  et la valeur de la vitesse au décollage du Marsupilami.

#### Exercice III.4. Oscillation d'un pendule ★ ★

Un point matériel  $A$  de masse  $m$  est suspendu à l'extrémité d'un fil idéal de longueur  $L$  dont l'autre extrémité  $O$  est fixe. On ne considère pas les mouvements en dehors d'un plan vertical  $Oxy$ . On repère  $A$  par l'angle  $\theta$  entre le fil et la verticale. On désigne par  $\vec{g} = g\vec{u}_x$  l'accélération de pesanteur. On tient compte d'une force de frottement fluide  $\vec{f} = -k_1 \vec{v}$ .

1. **Déterminer** l'équation différentielle du mouvement de  $A$  en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
2. Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime soit pseudo-périodique. **Donner** la condition sur  $k_1$  pour qu'il en soit ainsi. On utilisera une des formes canoniques de l'équation différentielle du deuxième ordre obtenue plus tôt.
3. On lâche le pendule sans vitesse initiale d'un position faisant un angle  $\theta_0$  faible. **Linéariser** l'équation différentielle du mouvement puis **déterminer** l'expression de  $\theta$  en fonction du temps  $t$ .
4. **Donner** l'allure de la courbe représentant  $\theta$  en fonction du temps.

**Exercice III.5. Cycliste au Tour de France ★ ★ ★**

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante  $\mathcal{P}$ , les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse  $v$  du cycliste telles  $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$  avec  $k$  une constante positive. On néglige le travail des forces de frottements du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal ( $Ox$ ) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, **établir** une équation différentielle en  $v$  et montrer qu'on peut la mettre sous la forme

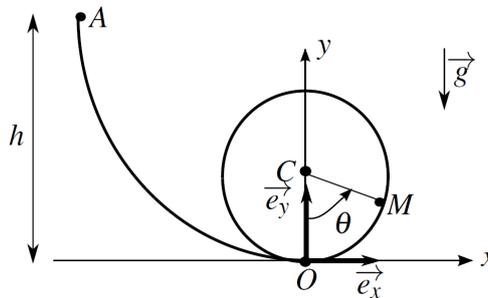
$$mv^2 \frac{dv}{dx} = k(v_l^3 - v^3)$$

avec  $v_l$  une constante homogène à une vitesse dont on cherchera la signification physique.

2. On pose  $f(x) = k(v_l^3 - v^3)$ . **Dériver**  $f(x)$  par rapport à  $x$ . **Exprimer**  $mv^2 \frac{dv}{dx}$  en fonction de  $\frac{df(x)}{dx}$ .
3. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par  $f(x)$  et **donner** la solution générale de cette équation.
4. On étudie le cycliste au moment où il aborde la ligne droite à la position  $x = 0$  et avec une vitesse  $v_0$ . **Déterminer** l'expression de  $f(x)$  puis de  $v(x)$  à partir de ces conditions initiales.
5. **Déterminer** la valeur de  $k$  pour  $\mathcal{P} = 2 \text{ kW}$  et la vitesse limite  $v_l = 20 \text{ m.s}^{-1}$ . **En déduire** la distance caractéristique  $L$  d'évolution de la vitesse pour un cycliste de masse  $m = 85 \text{ kg}$ .

**Exercice III.6. Bille dans une gouttière ★ ★ ★**

Une bille, assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est lâchée sans vitesse initiale depuis le point  $A$  d'une gouttière situé à une hauteur  $h$  du point le plus bas  $O$  de la gouttière. Cette dernière est terminée en  $O$  par un guide circulaire de rayon  $a$ , disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du guide circulaire. On note  $\vec{g} = -g\vec{u}_y$  l'accélération de la pesanteur.



1. **Calculer** la norme  $v_0$  de la vitesse en  $O$  puis en un point  $M$  quelconque du cercle repéré par l'angle  $\theta$ .
2. **Déterminer** la réaction de la gouttière en un point du guide circulaire.
3. **Déterminer** la hauteur minimale de  $A$  pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.

**Exercice III.7. Tige avec ressort ★ ★ ★**

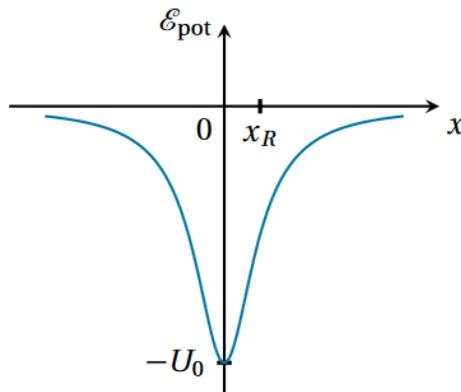
On considère une tige fixe, dans un plan vertical  $xOz$ , faisant un l'angle  $\alpha$  avec l'axe ( $Oz$ ). Un anneau  $M$  de masse  $m$  est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celui-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_v$  dont l'autre extrémité est fixée en  $O$ . On repère la position de  $M$  par  $OM = X$ .

1. **Déterminer** les forces conservatives appliquées à  $M$ . **Déterminer** l'expression de leur énergie potentielle  $E_p$  en fonction de  $X$  et  $\alpha$ .
2. **Établir** l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles. **Étudier** la fonction  $\mathcal{E}_p(X)$  dans le cas où  $mg \cos \alpha < kl_v$ . **Tracer** son allure.

4. **Discuter** sur le graphique les mouvements possibles en prenant  $t = 0$  les conditions initiales suivantes :  $X = l_v$  et  $\frac{dX}{dt} = V_0$ . **Préciser** la valeur maximale de  $V_0$  pour que le mouvement se fasse entre les deux positions extrêmes  $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$ .
5. **Déterminer** les fonctions  $V(X)$  et  $X(t)$  dans les conditions de la question précédente.

### Exercice III.8. Puits de potentiel ★ ★ ★

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe ( $Ox$ ) d'un atome de lithium  ${}^7\text{Li}$ , modélisé par un point matériel de masse  $m$ . Un faisceau laser focalisé au point  $O$  d'abscisse  $x = 0$  exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$ , avec  $U_0$  et  $x_R$  des constantes positives. La fonction  $\mathcal{E}_{pot}(x)$  est représentée sur la figure suivante.



L'axe ( $Ox$ ) est horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupe pas.

**Données** : masse d'un nucléon  $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, longueur  $x_R = 3,0 \cdot 10^{-4}$  m. La profondeur  $U_0$  est donnée en unité de température :  $U_0 = k_B T_0$  avec  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-27}$  J.K $^{-1}$  la constante de Boltzmann et  $T_0 = 200$   $\mu\text{K}$ .

- On considère un atome initialement immobile en  $x = 0$  au fond du puits de potentiel. À l'instant  $t = 0$ , on lui communique une vitesse  $v_0$  positive selon  $\vec{u}_x$ . **Déterminer** les conditions impliquant entre autres  $U_0$  et  $v_0$  pour que l'atome demeure dans un état lié.
- Dans le cas où l'atome est mis dans un état de diffusion, **déterminer** l'expression de sa vitesse limite, notée  $v_\infty$ , quand  $x \rightarrow \infty$ .
- On suppose que  $v_0^2 \ll 2U_0/m$ . **Montrer**, à l'aide d'un développement limité de  $\mathcal{E}_{pot}(x)$  pour  $x/x_R \ll 1$ , que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée  $\omega_0$ , dont on calculera la valeur.
- Dans cette question et celles qui suivent, on considère que l'axe ( $Ox$ ) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que  $x/x_R \ll 1$ .  
**Déterminer** une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée  $\mathcal{E}'_{pot}$ . On utilisera la variable  $y = x/x_R$  et le paramètre sans dimension  $\alpha = U_0/(mgx_R)$ .
- Justifier** brièvement, en traçant son allure, que  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  peut présenter de nouveau un minimum local si  $\alpha$  est supérieur à une valeur critique  $\alpha_c$  dont on ne cherchera pas à donner la valeur. **Tracer** l'allure de  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  pour  $\alpha > \alpha_c$ .
- On donne  $\alpha_c = 1,54$ . **Calculer** la valeur de  $U_0$  correspondante, les autres paramètres étant inchangés et **commenter**.
- Expliquer**, sans mener les calculs, comment calculer la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre

## Correction

### Exercice III.2. Distance de freinage ★

1. D'après le théorème de l'énergie mécanique, la somme des travaux des forces non conservatives exercées sur un système est égale à la variation d'énergie mécanique de ce système

$$\Delta \mathcal{E}_m = \sum_i W(\vec{F}_i).$$

Dans le cas étudié, le système qui est la voiture n'est soumise qu'à une seule force non conservative, la force de freinage que l'on note  $\vec{f}$ . Ainsi

$$\Delta \mathcal{E}_m = W(\vec{f}).$$

On peut calculer la variation d'énergie mécanique entre le moment initial de l'étude : l'instant avant que la voiture freine, et le moment final de l'étude : la voiture est arrêtée.

À l'instant initial

$$\mathcal{E}_m(t_i) = \mathcal{E}_c(t_i) + \mathcal{E}_p(t_i).$$

La seule énergie potentielle de la voiture est l'énergie potentiel de pesanteur  $\mathcal{E}_p = mgz$  dont on peut prendre l'origine à la hauteur  $z$  de la voiture afin qu'elle s'annule. Il vient donc que

$$\mathcal{E}_m(t_i) = \frac{1}{2}mv_i^2$$

avec  $v_i$  la valeur de la vitesse de la voiture avant le freinage.

À l'instant final

$$\mathcal{E}_m(t_f) = 0.$$

Donc il vient que

$$W(\vec{f}) = \Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(t_f) - \mathcal{E}_m(t_i) = -\frac{1}{2}mv_i^2.$$

**A.N.**

$$W(\vec{f}) = \frac{1}{2} \times 1,5 \cdot 10^3 \times \left(\frac{50}{3,6}\right)^2 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

2. D'après la définition du travail élémentaire il vient que

$$W(\vec{f}) = \int \delta W(\vec{f})$$

soit

$$W(\vec{f}) = \int \vec{f} \cdot d\vec{OM}.$$

On considère que le mouvement de la voiture s'effectue le long d'un axe ( $Ox$ ), comme la force de freinage est constante et opposée au mouvement il vient que

$$W(\vec{f}) = \int_{x_i}^{x_f} -f dx = -f \int_{x_i}^{x_f} dx = -f(x_f - x_i) = -fd.$$

Ainsi

$$f = -\frac{W(\vec{f})}{d} = \frac{1}{2} \frac{m}{d} v_i^2.$$

A.N.

$$f = \frac{1}{2} \frac{1,5 \cdot 10^3}{15} \left( \frac{50}{3,6} \right)^2 = 9,6 \cdot 10^3 \text{ N.}$$

3. On cherche la nouvelle distance de freinage  $d'$  pour une nouvelle vitesse initiale  $v'_i$ . Comme la valeur de la force est constante, on peut utiliser l'expression précédente

$$f = \frac{1}{2} \frac{m}{d'} v_i^2$$

soit

$$d' = \frac{1}{2} \frac{m}{f} v_i^2.$$

Cela est aussi vrai pour la situation précédente, donc

$$d = \frac{1}{2} \frac{m}{f} v_i^2$$

soit

$$\frac{1}{2} \frac{m}{f} = \frac{d}{v_i^2}.$$

On peut réexprimer la distance  $d'$

$$d' = d \frac{v_i'^2}{v_i^2}.$$

A.N.

$$d' = 15 \times \frac{(70 \text{ km.h}^{-1})^2}{(50 \text{ km.h}^{-1})^2} = 29 \text{ m.}$$

4. La phrase du livret d'apprentissage est la description de l'expression trouvée précédemment

$$\frac{d'}{d} = \left( \frac{v'_i}{v_i} \right)^2.$$

#### Exercice III.4. Oscillation d'un pendule ★ ★

1. Le système est le point matériel. On se place dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre. Le mouvement étant circulaire dans un plan, le système de coordonnées le mieux adapté est le système cylindro-polaire.

Bilan des forces : le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$ , la tension du fil  $\vec{T}$  et une force de frottement fluide  $\vec{f} = -k_1 \vec{v}$ .

Dans le repère cylindro-polaire la vitesse est définie telle que

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

avec  $R$  le rayon de la trajectoire circulaire de l'objet qui correspond ici à  $L$ , soit

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

D'après le théorème de la puissance cinétique il vient que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

soit ici

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{T} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

La tension du fil est radiale et l'énergie cinétique est telle que

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

donc

$$\frac{1}{2}mL^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = m\vec{g} \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta - T\vec{u}_\rho \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta - k_1L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgL\dot{\theta}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - k_1L^2\dot{\theta}^2$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgL\dot{\theta}\sin(\theta) - k_1L^2\dot{\theta}^2$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k_1L^2\dot{\theta}^2 + mgL\dot{\theta}\sin(\theta) = 0$$

$$\frac{L}{g}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{k_1L}{m} \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\sin(\theta) = 0.$$

soit, en considérant les solutions pour lesquelles  $\dot{\theta} \neq 0$

$$\frac{L}{g}\ddot{\theta} + \frac{k_1L}{m}\dot{\theta} + \sin(\theta) = 0.$$

2. On remarque que l'équation différentielle précédente correspond à l'équation d'un oscillateur amorti. On utilise une équation canonique pour identifier la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du système, soit

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\theta} + \frac{1}{Q\omega_0}\dot{\theta} + \theta = 0.$$

Il vient que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

et

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{k_1L}{m}g$$

soit

$$Q = \frac{1}{\omega_0} \frac{g}{Lk_1} = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{g}{Lk_1} = \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{m}{k_1}.$$

Le système est en régime pseudo-périodique lorsque  $Q > \frac{1}{2}$  soit

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \frac{m}{k_1} > \frac{1}{2}$$

$$k_1 < 2m\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

3. Pour des amplitudes faibles du pendule on peut faire le développement limité à l'ordre 0 de  $\sin \theta$  en  $\theta$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . Il vient que

$$\frac{L}{g}\ddot{\theta} + \frac{k_1 L}{m g}\dot{\theta} + mgL\theta = 0.$$

L'équation est ainsi linéarisée : il n'y a plus que des termes impliquant  $\theta$  à la puissance un (on peut développer le sinus d'une variable en somme de puissances de cette variable).

Le mouvement étant pseudo-périodique, la solution de l'équation différentielle homogène du deuxième ordre est

$$\theta(t) = e^{-t/\tau} (K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t))$$

avec  $\tau$  la constante de temps du circuit telle que

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 2\sqrt{\frac{g}{L}} \frac{m}{k_1} \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\frac{m}{k_1}$$

et  $\omega$  la pseudo-période telle que

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

On peut déterminer les constantes  $K_1$  et  $K_2$  à partir des conditions initiales du mouvement. Initialement le pendule est en  $\theta_0$  et sa vitesse est nulle, ainsi

$$\theta(0) = K_1 = \theta_0$$

donc

$$\theta(t) = e^{-t/\tau} (\theta_0 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)).$$

La vitesse angulaire est donc

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (\theta_0 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)) + e^{-t/\tau} (-\omega \theta_0 \sin(\omega t) + \omega K_2 \cos(\omega t))$$

soit à  $t = 0$

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{1}{\tau} \theta_0 + \omega K_2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{\omega \tau} \theta_0.$$

Ainsi l'équation du mouvement du pendule amorti est

$$\theta(t) = e^{-t/\tau} \left( \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\theta_0}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right)$$

4. L'évolution de la coordonnée  $\theta$  du pendule est donnée ci-dessous.

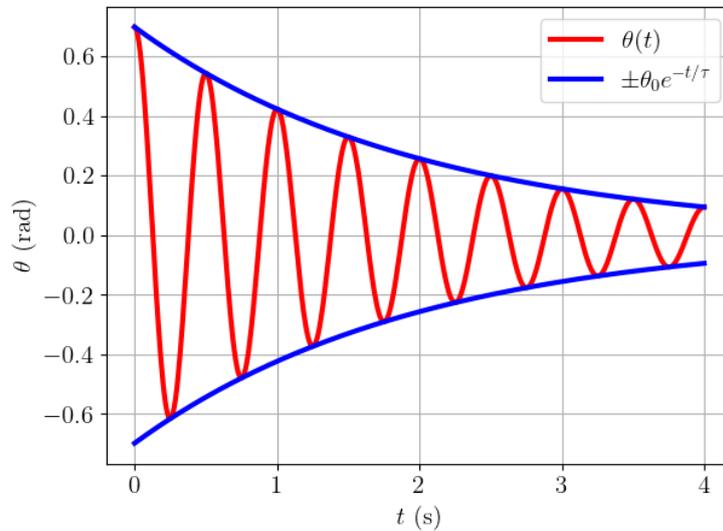


FIGURE 5.1 – Évolution de la coordonnée  $\theta$  en fonction du temps.

### Exercice III.5. Cycliste au Tour de France ★ ★ ★

1. Le sol est lié au référentiel galiléen terrestre. Le système constitué du cycliste et de son vélo est assimilé à son centre de gravité et soumis à deux forces verticales : son poids et la réaction du sol ; et à deux forces horizontales : la force de frottement de l'air et la force motrice.

On applique le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}) + \mathcal{P}(\vec{F}_f) + \mathcal{P}.$$

Comme le poids et la réaction du support sont orthogonales au mouvement, ces forces ne travaillent pas donc leur puissance est nulle. Il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \vec{F}_f \cdot \vec{v} + \mathcal{P} \\ \frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} &= -kv \vec{v} \cdot \vec{v} + \mathcal{P} \\ mv \frac{dv}{dt} &= \mathcal{P} - kv^3. \end{aligned}$$

Si on considère que la dérivée temporelle de la vitesse est un rapport de deux différentielles on peut écrire que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

ainsi

$$\begin{aligned} mv^2 \frac{dv}{dx} &= \mathcal{P} - kv^3 \\ mv^2 \frac{dv}{dx} &= k \left( \frac{\mathcal{P}}{k} - v^3 \right). \end{aligned}$$

On peut identifier le terme  $\frac{\mathcal{P}}{k}$  à  $v_l^3$ , le cube de la vitesse limite : la vitesse pour laquelle la puissance motrice est compensée par la puissance des forces de freinage.

2.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (k(v_l^3 - v^3))$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (k(v_l^3 - v^3))$$

or comme  $k$  et  $v_{lim}$  sont des constantes, il vient que

$$\frac{df(x)}{dx} = -k \frac{dv^3}{dx} = -3v^2 \frac{dv}{dx}.$$

En multipliant par  $-\frac{m}{3k}$  l'expression précédente, il vient que

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{m}{3k} \frac{df(x)}{dx}.$$

3. L'équation différentielle initiale stipule que

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = k(v_{lim}^3 - v^3)$$

or, on a montré que

$$mv^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{m}{3k} \frac{df(x)}{dx}$$

et il a été posé que

$$f(x) = k(v_{lim}^3 - v^3)$$

donc, il vient que

$$-\frac{m}{3k} \frac{df(x)}{dx} = f(x)$$

soit

$$f(x) + \frac{m}{3k} \frac{df(x)}{dx} = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$f(x) = Ae^{-x/L}$$

avec  $A$  une constante à déterminer à partir de la condition initiale et  $L$  la distance caractéristique d'évolution de  $f(x)$  telle que

$$L = \frac{m}{3k}.$$

4. A  $t = 0$ , le cycliste se trouve en  $x = 0$  et il a une vitesse initiale  $v_0$ , il vient que

$$f(x = 0) = A = k(v_{lim}^3 - v_0^3)$$

donc

$$f(x) = k(v_{lim}^3 - v_0^3) e^{-x/L}.$$

Or par définition

$$f(x) = k(v_{lim}^3 - v^3)$$

donc

$$v(x) = \left( v_{lim}^3 - \frac{f(x)}{k} \right)^{1/3}$$

soit

$$v(x) = \left( v_{lim}^3 - (v_{lim}^3 - v_0^3) e^{-x/L} \right)^{1/3}.$$

5. On a vu que

$$v_l^3 = \frac{\mathcal{P}}{k}$$

donc

$$k = \frac{\mathcal{P}}{v_l^3}.$$

A.N.

$$k = \frac{2 \cdot 10^3}{(20)^3} = 0,3 \text{ kg.m}^{-1}.$$

On a aussi montré que

$$L = \frac{m}{3k} = m \frac{v_l^3}{3\mathcal{P}}.$$

A.N.

$$L = 85 \times \frac{20^3}{3 \times 2 \cdot 10^3} = 113 \text{ m}.$$

### Exercice III.6. Bille dans une gouttière ★ ★ ★

1. Le référentiel lié au sol est galiléen. Les forces s'appliquant au système  $M$  sont le poids (force conservative) et la réaction du support dont le travail car orthogonal au mouvement dans le cas d'un mouvement sans frottement. On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique. On peut écrire

$$\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(O)$$

soit

$$\frac{1}{2}mv^2(A) + mgy(A) = \frac{1}{2}mv^2(O) + mgy(O)$$

et comme la vitesse est nulle en  $A$ , il vient que

$$mg(y(A) - y(O)) = \frac{1}{2}mv^2(O)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(O)$$

soit

$$v(O) = \sqrt{2gh}.$$

Dans le repère polaire dont l'origine est en  $C$  la position du système  $M$  sur le cercle est

$$\overrightarrow{CM} = \rho \vec{u}_\rho.$$

L'altitude du système  $M$  dans le repère cartésien est donc

$$y(M) = y(C) + \overrightarrow{CM} \cdot \vec{u}_y$$

$$y(M) = a + a \cos(\pi - \theta)$$

$$y(M) = a(1 - \cos \theta).$$

La vitesse du système  $M$  en n'importe quel point du cercle est obtenue de manière similaire

$$mgy(A) = \frac{1}{2}mv^2(M) + mgy(M)$$

$$\frac{1}{2}mv^2(M) = mg(y(A) - y(M))$$

$$v(M) = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos \theta))}.$$

2. Pour déterminer la réaction, on fait l'hypothèse que la bille reste en contact avec la gouttière. Dans ce cas, son mouvement est circulaire (sa coordonnée  $\rho$  est constante) et on utilise les relations cinématiques

$$\overrightarrow{CM} = \rho \vec{u}_{r\theta} \quad \vec{v} = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + \rho \ddot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

Le PFD sur la composante  $\vec{u}_\theta$  donne

$$ma_\theta = -R + mg \cos \theta$$

avec  $R$  la norme de la réaction du support. Il vient que

$$-m\rho \dot{\theta}^2 = -R + mg \cos \theta.$$

La coordonnée  $\rho$  correspond à  $a$  le rayon du cercle, soit

$$-ma\dot{\theta}^2 = -R + mg \cos \theta.$$

On remarque que la vitesse peut s'écrire

$$\vec{v} = a\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

donc sa norme est

$$v = a\dot{\theta}$$

ainsi

$$-m \frac{v^2}{a} = -R + mg \cos \theta.$$

On utilise l'expression de  $v$  obtenue à la question 1

$$-2mg \left( \frac{h}{a} - (1 - \cos \theta) \right) = -R + mg \cos \theta$$

$$R = 2mg \left( \frac{h}{a} - (1 - \cos \theta) \right) + mg \cos \theta$$

$$R = mg \left( 3 \cos \theta + 2 \frac{h}{a} - 2 \right).$$

3. Pour que la bille ait un mouvement révolutif, il faut que la réaction ne s'annule en aucun point du cercle. Son expression montre qu'elle est minimale en  $\theta = \pi$  (au sommet du cercle). On souhaite donc que  $R(\theta = \pi) > 0$  soit

$$mg \left( 3 \cos \pi + 2 \frac{h}{a} - 2 \right) > 0$$

$$mg \left( -3 + 2 \frac{h}{a} - 2 \right) > 0$$

$$h > \frac{5}{2}a.$$

### Exercice III.7. Tige avec ressort ★ ★ ★

1. Les forces conservatives appliquées à  $M$  sont son poids  $\vec{P}$  et la force de rappel du ressort notée  $\vec{T}_r$ . La réaction du support ne travaille pas (elle est perpendiculaire au mouvement). L'énergie potentielle de pesanteur de laquelle dérive le poids est

$$\mathcal{E}_p = mgz + \text{cst}$$

avec  $z$  la coordonnée du système défini selon le schéma ci-dessous.

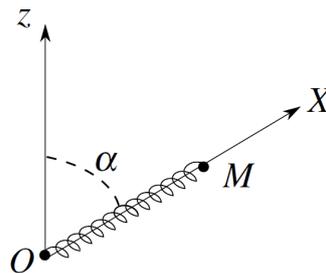


FIGURE 5.2 – Schéma du problème.

À partir de la définition de  $OM$  il vient que

$$z = X \cos \alpha$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mgX \cos \alpha + \text{cst}.$$

L'énergie potentielle de pesanteur associée à la force de rappel du ressort est

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(l - l_v)^2 + \text{cst}$$

avec  $l$  la longueur du ressort qui correspond dans notre cas à  $X$ . Ainsi

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(X - l_v)^2 + \text{cst}.$$

La somme des énergies potentielles est donc

$$\mathcal{E}_p = mgX \cos \alpha + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2 + \text{cst}.$$

On peut prendre l'origine de la somme des énergies potentielles en  $X = l_v$  soit

$$0 = mgl_v \cos \alpha + \frac{1}{2}k(l_v - l_v)^2 + \text{cst}$$

$$0 = mgl_v \cos \alpha + \text{cst}$$

$$\text{cst} = -mgl_v \cos \alpha$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mg(X - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2.$$

2. D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Ici, il n'y a pas de frottements et la force de réaction du support est normale au mouvement donc l'énergie mécanique est constante, soit

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0.$$

Exprimons la dérivée temporelle de l'énergie mécanique pour le système. Donnons d'abord l'expression de  $\mathcal{E}_m$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mg(X - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2.$$

Dans le repère choisi la valeur de la vitesse  $v$  correspond à la dérivée par rapport au temps de la coordonnées  $X$ , soit  $\dot{X}$ , ainsi

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mg(X - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2.$$

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est donc

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X} \cos \alpha + k\dot{X}(X - l_v).$$

Or, comme l'énergie mécanique est constante, il vient que

$$0 = m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X} \cos \alpha + k\dot{X}(X - l_v).$$

En cherchant une solution différente de  $\dot{X} = 0$ , il vient que

$$0 = m\ddot{X} + mg \cos \alpha + k(X - l_v)$$

soit

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}l_v - m \cos \alpha.$$

On trouve une équation différentielle du premier ordre correspondant à l'équation d'un oscillateur harmonique.

3. Afin d'étudier la fonction  $\mathcal{E}_p(X)$  on doit définir sa dérivée, soit

$$\frac{d\mathcal{E}_p(X)}{dX} = mg \cos \alpha + k(X - l_v).$$

Cette dérivée s'annule pour

$$X_0 = l_v - m \frac{g}{k} \cos \alpha$$

avec  $X > 0$  car  $mg \cos \alpha < kl_v$ .

Pour cette position, l'énergie potentielle est

$$\mathcal{E}_p(X_0) = mg \left( l_v - m \frac{g}{k} \cos \alpha - l_v \right) \cos \alpha + \frac{1}{2} k \left( l_v - m \frac{g}{k} \cos \alpha - l_v \right)^2$$

$$\mathcal{E}_p(X_0) = -m^2 \frac{g^2}{k} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} m^2 \frac{g^2}{k} \cos^2 \alpha = -\frac{1}{2} \frac{(mg \cos \alpha)^2}{k}.$$

Pour  $X < X_0$  la dérivée de  $\mathcal{E}_p(X)$  est négative, donc la fonction  $\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_c(t=0) = \frac{1}{2} m V_0^2 \cdot (X)$  est décroissante de  $X \rightarrow -\infty$  jusqu'à  $X_0$ .

Pour  $X > X_0$  la dérivée de  $\mathcal{E}_p(X)$  est positive, donc la fonction  $\mathcal{E}_p(X)$  est croissante de  $X_0$  à  $X \rightarrow \infty$ .

On peut tracer l'allure de la variation d'énergie potentielle en fonction de la position  $X$ .

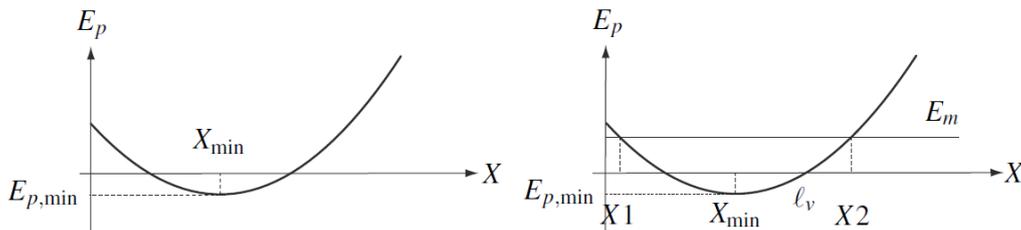


FIGURE 5.3 – Schéma du problème

4. Les positions accessibles au système dépendent de la valeur de l'énergie mécanique qui est constante car les seules forces dont le travail est non nul sont conservatives.

A  $t = 0$ , les énergies potentielles sont nulles donc

$$\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_c(t=0) = \frac{1}{2} m V_0^2.$$

Les seules valeurs accessibles de  $X$  sont celles pour lesquelles

$$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p.$$

Les points extrêmes  $X_a$  et  $X_b$  entre lesquels le mouvement est possible correspondent à des points pour lesquels l'énergie cinétique est nulle donc

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m V_0^2$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mg (X_{a,b} - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2} k (X_{a,b} - l_v)^2 = \frac{1}{2} m V_0^2.$$

Comme on peut le voir sur le graphique, la position minimale  $X_a$  est positive si  $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_p(0)$  donc la vitesse  $V_0$  pour que cela soit respectée est telle que

$$\frac{1}{2} m V_0^2 < mg (0 - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2} k (0 - l_v)^2$$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 < -m g l_v \cos \alpha + \frac{1}{2} k l_v^2$$

donc

$$V_0 < \pm \sqrt{\frac{l_v^2 - 2m g l_v \cos \alpha}{m}}.$$

5. On obtient la vitesse en exprimant l'énergie mécanique en tout point de la trajectoire est la même qu'à l'instant initial, soit

$$\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_m(X)$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + mg(X - l_v) \cos \alpha + \frac{1}{2}k(X - l_v)^2$$

donc

$$V = \pm \sqrt{V_0^2 - 2gX \cos \alpha - \frac{k(X - l_v)^2}{m} + 2gl_v \cos \alpha}.$$

Pour déterminer  $X(t)$ , on utilise l'équation du mouvement établie à la question 2. On utilise la position du minimum du potentiel

$$X_0 = l_v - \frac{mg \cos \alpha}{k}$$

et la pulsation propre du système  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Il vient que

$$\ddot{X} + \omega^2 \dot{X} = \omega_0 X_0.$$

En résolvant l'équation différentielle du deuxième ordre, il vient que

$$X = X_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

À  $t = 0$ ,  $X(0) = l_v$ , donc

$$X = X_0 + A = l_v$$

donc  $A = l_v - X_0$ , soit

$$X = X_0 + (l_v - X_0) \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

La variation temporelle de  $X$  est

$$V = -\omega_0 (l_v - X_0) \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

à  $t = 0$ ,  $V = V_0$ , soit

$$V_0 = \omega_0 B$$

donc  $B = \frac{V_0}{\omega_0}$ , donc

$$X = X_0 + (l_v - X_0) \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

### Exercice III.8. Puits de potentiel ★ ★ ★

1. La force exercée sur l'atome est conservative donc l'énergie mécanique est conservée. De plus, l'atome reste dans un état lié si son énergie mécanique est inférieure à la valeur asymptotique de  $\mathcal{E}_{pot}$  quand  $x$  tend vers l'infini, soit  $\mathcal{E}_{pot}(x \rightarrow \pm\infty) = 0$  donc  $\mathcal{E}_m < 0$ . On calcule à l'état initial

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - U_0$$

la condition est donc

$$v_0 < \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

2. Lorsque l'atome est dans un état de diffusion son énergie mécanique est supérieure même pour les valeurs asymptotiques de l'énergie potentielle. Pour ces valeurs l'énergie mécanique est

$$\mathcal{E}_m(x \rightarrow \pm\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2.$$

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique à l'instant initial et pour  $x \rightarrow \pm\infty$  il vient que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - U_0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

soit

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \frac{2U_0}{m}}.$$

3. Pour  $z \ll 1$  le développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $(1+z)^\alpha \approx 1 + \alpha z$  donc il vient que

$$\mathcal{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = -U_0 \left(1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right)^{-1} \approx -U_0 \left(1 - \left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right) = -U_0 + \frac{U_0}{x_R^2}x^2.$$

On peut réécrire l'énergie potentielle sous la forme

$$\mathcal{E}_{pot}(x) = -U_0 + \frac{1}{2}kx^2$$

avec  $k = \frac{2U_0}{x_R^2}$ .

On reconnaît l'expression de l'énergie potentiel d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  soit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{mx_R^2}}.$$

**A.N.**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{7 \times m_n \times x_R^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 200 \cdot 10^{-6}}{7 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times (3,0 \cdot 10^{-4})^2}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ rad.}$$

4. On rajoute l'énergie potentielle de pesanteur  $mgx$  à l'expression précédente en considérant que l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est située en  $x = 0$ . Il vient que

$$\mathcal{E}'_{pot} = mgx - \frac{U_0}{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgx \frac{x_R}{x_R} - \frac{mgx_R}{mgx_R} \frac{U_0}{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgy_{xR} - mgx_R \frac{\alpha}{1 + y^2}$$

donc

$$\mathcal{E}'_{pot} = mgx_R \left( y - \frac{\alpha}{1 + y^2} \right).$$

5. On a représenté l'allure de  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  sur la Figure 5.4. Pour  $\alpha$  faible, on retrouve la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. L'énergie potentielle due au laser  $\mathcal{E}_{pot}$  creuse une indentation dans la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. Cette indentation est d'autant plus grande que  $\alpha$  est grand. Si  $\alpha$  est suffisamment important, la contribution de  $\mathcal{E}_{pot}$  peut rendre  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  localement décroissante : on a alors un minimum local d'énergie potentielle, soit un nouvel équilibre stable.

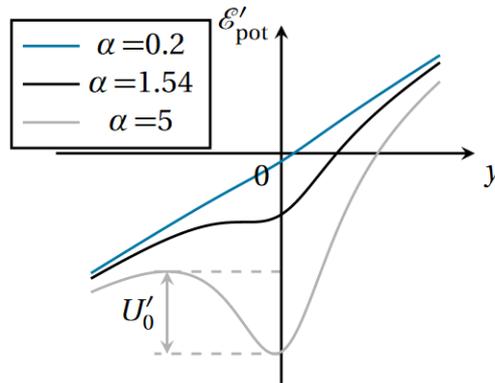


FIGURE 5.4 – Allure de  $\mathcal{E}'_{pot}(y)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

6. La valeur  $\alpha = 1,54$  marque l'apparition de ce minimum local. D'après la définition de  $\alpha$ , on calcule alors

$$\alpha_c U_0 = \alpha_c m g x_R.$$

**A.N.**

$$\alpha_c U_0 = 1,54 \times 7 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9,8 \times 3,0 \cdot 10^{-4} = 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ J.}$$

Il faut comparer cette valeur à  $U_0 = k_B T_0$  pour montrer que pour cette valeur de  $\alpha_c U_0$  on a bien un minimum local de l'énergie potentielle, soit

**A.N.**

$$U_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \times 200 \cdot 10^{-6} = 2,8 \cdot 10^{-27} \text{ J.}$$

Pour cette valeur de  $\alpha_c$  on voit bien apparaître un minimum local du potentiel.

7. La profondeur du piège est la grandeur  $U'_0$  représentée sur la Figure 5.4. On détermine les abscisses du minimum  $x_{min}$  et du maximum  $x_{max}$  locaux de  $\mathcal{E}'_{pot}$  en annulant sa dérivée. La profondeur  $U'_0$  est alors  $\mathcal{E}'_{pot}(x_{max}) - \mathcal{E}'_{pot}(x_{min})$ . La position d'équilibre est en  $x = x_{min}$ .