Travaux dirigés

Chapitre 2 - Systèmes en rotation

TD I. Rotation d'un objet ponctuel

Exercice I.1. Ordre de grandeur des moments cinétiques ★

1. Lors de son mouvement révolutif autour du Soleil, la Terre de centre T parcourt une trajectoire quasi-circulaire de centre confondu avec le centre du Soleil S et de rayon égal à la distance Terre-Soleil $D_{TS} = 150.10^6$ km. **Calculer** la valeur du moment cinétique de la Terre par rapport à S dans le référentiel héliocentrique.
   On rappelle que la masse de la Terre vaut $m_T = 6,0.10^{30}$ kg.
2. Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53$ pm est parcourue à la fréquence $f = 6,6.10^{15}$ Hz. **Calculer** le moment cinétique de l'électron.
   On rappelle que sa masse vaut $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.

Exercice I.2. Pendule simple ★

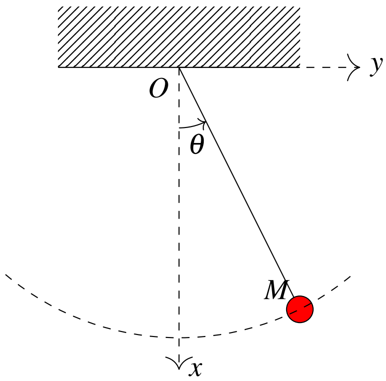

Figure 2.1 – Schéma du pendule simple.

Utiliser le théorème du moment cinétique afin d'**obtenir** l'équation du mouvement d'un point matériel M de masse m relié à un fil idéal de longueur l et formant un pendule simple.

Exercice I.3. Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil ★ ★

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0,10$ kg est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1,0$ m dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon l_0. Sa vitesse est $v_0 = 1,0$ m·s^{-1}.

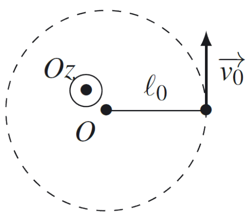

Figure 2.2 – Schéma du problème.

1. **Déterminer** son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).
2. On réduit brutalement la longueur du fil à $l_0 = 0,5$ m. **Déterminer** la vitesse de la sphère.
3. **Comparer** l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.
4. **Détetrminer** la force qui provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère. **Commenter**.

Exercice I.4. Moment cinétique d'une comète ★ ★ ★

On repère une comète de masse m lors de son passage au point P_0, point de sa trajectoire le plus proche du Soleil S. L'instant où la comète passe en P_0 est pris comme instant initial. La comète est alors animée d'une vitesse v_0 et sa distance au Soleil est r_0.

1. **Faire un schéma** approximatif de la trajectoire de la comète. Placer en particulier le point P_0 et la vitesse v_0.
2. **Justifier** que la vitesse radiale est nulle en P_0.
3. **Exprimer** le moment cinétique initial par rapport à S de la comète.
4. La seule force qui s'exerce sur la comète est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil. **Montrer** que son moment cinétique est une constante du mouvement.

Correction

Exercice I.2. Pendule simple ★

Le système est le point M de masse m. On l'étudie dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen. On utilise le repère cylindro-polaire.

Les forces qui s'exercent sur lui sont son poids $\overrightarrow{P}$ tel que

$$\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u}_\rho - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u}_\theta$$

et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ telle que

$$\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u}_\rho.$$

On choisit d'étudier le moment cinétique du point M et les moments des forces exercées sur lui par rapport à l'origine O du repère.

D'après le théorème du moment cinétique, il vient que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{F}_i\right).$$

Le moment cinétique du point M par rapport à O est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L}_O &= \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{p}\\ &= m\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{v}\\ &= m\begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\\rho\dot{\theta}\\0\end{pmatrix} = m\rho^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_z.\end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = m\rho^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u}_z$$

car la coordonnée radiale ρ du point m est constante.

On étudie maintenant les moments des forces. Il vient que

$$\overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{P}\right) = \begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}mg\cos\theta\\-mg\sin\theta\\0\end{pmatrix} = -mg\rho\sin\theta\,\overrightarrow{u}_z$$

et

$$\overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{T}\right) = \begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}T\\0\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

On pouvait voir directement que le moment de la tension du fil était nul car son bras de levier est nul.

Ainsi il vient que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{F}_i\right)\\ m\rho^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u}_z &= -mg\rho\sin\theta\,\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

soit en simplifiant

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\rho}\sin\theta.$$

Si on considère des faibles oscillations du pendule, soit une coordonnée angulaire faible à tout instant, on peut faire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\sin\theta \approx \theta$, soit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\rho}\theta.$$

Comme la coordonnée radiale ρ de M correspond à la longueur l du fil, il vient que

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$

On retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Sa solution est

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).}$$

Exercice I.3. Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil ★ ★

1. Le moment cinétique par rapport à O de la sphère est

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}.$$

La trajectoire de la bille étant circulaire, dans le repère cylindro-polaire le vecteur position est

$$\overrightarrow{OM} = l_0 \vec{u}_\rho$$

et le vecteur vitesse est

$$\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta.$$

Ainsi le moment cinétique est, en utilisant la règle de la main droite

$$\boxed{\vec{L}_O = m l_0 v_0 \vec{u}_z.}$$

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Oz) est donc

$$\begin{aligned} L_{(Oz)} &= \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z \\ &= m l_0 v_0 \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{L_{(Oz)} = m l_0 v_0.}$$

2. Si on étudie les forces qui s'exercent sur la sphère il y a son poids $\vec{P}$ vertical, la réaction du support $\vec{R}$, et la tension du fil $\vec{T}$.
Le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) est

$$M_{(Oz)}\left(\vec{P}\right) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \cdot \vec{u}_z = \left(\begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{u}_z = mgl_0 \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_z = 0.$$

On pouvait voir directement que le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) était nul car le poids est vertical donc parallèle à l'axe (Oz).

Le moment de la tension du fil par rapport à l'axe (Oz) est

$$M_{(Oz)}\left(\overrightarrow{T}\right) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = \left(\begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{u}_z = 0.$$

On pouvait voir directement que le moment de la tension du fil par rapport à l'axe (Oz) était nul car la tension du fil est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$, son bras de levier est donc nul.

Ainsi la somme des moments des forces par rapport à l'axe (Oz) est nul, d'après le théorème du moment cinétique, cela signifie que

$$\frac{\mathrm{d}L_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_{Oz}\left(\overrightarrow{F}_i\right) = 0$$

donc que le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Oz) est constant, donc

$$L_{(Oz)} = ml_0 v_0 = \mathrm{cst}.$$

Ainsi si on fait varier la longueur l_0 du fil, la conservation du moment cinétique implique que la valeur de la vitesse variera également de telle manière que pour une nouvelle longueur l_0', la nouvelle vitesse v_0' est

$$L_{(Oz)} = ml_0 v_0 = ml_0' v_0'$$

soit

$$v_0' = v_0 \frac{l_0}{l_0'}.$$

A.N.

$$\boxed{v_0' = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \times \frac{1{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.}$$

3. L'énergie cinétique avant la réduction de la longueur du fil est

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

A.N.

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} 0{,}10\,\mathrm{kg} \times \left(1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2 = 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}.}$$

L'énergie cinétique après la réduction de la longueur du fil est

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} m v_0'^2$$

A.N.

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} 0{,}10\,\mathrm{kg} \times \left(2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2 = 2 \times 10^{-1}\,\mathrm{J}.}$$

L'énergie cinétique est quadruplée.

4. D'après le théorème de l'énergie cinétique la variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces qui s'exerce sur le système
$$\Delta \mathscr{E}_c = \sum_i W\left(\overrightarrow{F_i}\right).$$
Si on calcule le travail des forces il vient que
$$\begin{aligned} W\left(\overrightarrow{F_i}\right) &= W\left(\overrightarrow{P}\right) + W\left(\overrightarrow{T}\right) \\ &= \int \overrightarrow{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} + \int \overrightarrow{T}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= \int -mg\overrightarrow{u}_z \cdot \left(\mathrm{d}r\overrightarrow{u}_\rho + \rho \mathrm{d}\theta \overrightarrow{u}_\theta + \mathrm{d}z\right) + \int -T\overrightarrow{u}_\rho \cdot \left(\mathrm{d}\rho \overrightarrow{u}_\rho + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta + \mathrm{d}z\right) \\ &= \int_0^0 -mg\mathrm{d}z + \int_{l_0}^{l_0'} -T\mathrm{d}\rho \\ &= 0 - T\left(l_0' - l_0\right). \end{aligned}$$
Ainsi la variation de l'énergie cinétique est due au travail de la tension du fil
$$\boxed{\Delta \mathscr{E}_c = T\left(l_0 - l_0'\right)}$$
si la longueur diminue $l_0 - l_0' > 0$ et si le fil exerce une traction sur la bille $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_\rho$, alors il y a augmentation de l'énergie cinétique.

Exercice I.4. Moment cinétique d'une comète ★ ★ ★

1. Le schéma ci-dessous représente la comète P.

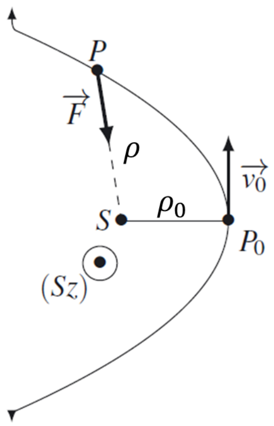

FIGURE 2.3 – Schéma du problème.

2. On considère que la trajectoire de la comète est plane. On utilise le repère cylindrique pour la repérer, son vecteur position est
$$\overrightarrow{OP} = \rho\overrightarrow{u}_\rho.$$
Sa vitesse est donc
$$\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta.$$

La coordonnée radiale ρ de la comète passe par un minimum ρ_0 lorsqu'elle passe en P_0, soit l'instant initial, la dérivée par rapport au temps de ρ est donc nul en P_0 (la dérivée d'une fonction au niveau de ces extrema est nulle). Ainsi la vitesse est purement orthoradiale en P_0

$$\overrightarrow{v}(t=0) = \rho_0 \dot{\theta}(t=0)\overrightarrow{u}_\theta.$$

3. À l'instant initial le moment cinétique de la comète par rapport au soleil en S est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L}_S(t=0) &= \overrightarrow{SP_0} \wedge m\overrightarrow{v}_0 \\ &= m\rho_0 \overrightarrow{u}_\rho \wedge \rho_0 \dot{\theta}(t=0)\overrightarrow{u}_\theta\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{L}_S(t=0) = m\rho_0^2 \dot{\theta}(t=0)\overrightarrow{u}_z.}$$

4. La seule force qui s'exerce sur la comète est la force d'attraction gravitationnelle notée $\overrightarrow{F}_G$ et exercée par le Soleil dirigé de P vers S. Cette force est à tout instant dirigée selon la droite SP de sorte que son moment cinétique par rapport à S vaut

$$\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{F}_G\right) = \overrightarrow{SP} \wedge \overrightarrow{F}_G = \overrightarrow{0}.$$

D'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_S}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{F}_G\right) = \overrightarrow{0}$$

le moment cinétique de la comète par rapport à S est donc une constante du mouvement.