BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 2 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice 1

1. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (Existence ? ?) avec :

   (a) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (b) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Exercice 2

Soient $f : t\mapsto \dfrac{t^2-2\pi t}{2\pi}$ et $g : t\mapsto \begin{cases}\dfrac{f(t)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t\neq 0\\ -1 & \text{si } t=0\end{cases}$ deux fonctions définies sur $[0,\pi]$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1. Démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$ puis de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$ avec k entier supérieur à 1.
3. Démontrer que, pour tout t de $]0,\pi]$, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi}h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\right)=0$.
5. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 2 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Convergence et somme de séries exponentielles et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Exercice 1

$\displaystyle\sum \frac{\ln(n^n)}{n!}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ convergent-elles ?

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2 puis écrire en `Python` une fonction qui renvoie les N premières valeurs de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
   (c) Établir que, pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
4. On se propose de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))$ converge et : $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}})$ puis $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$ et conclure.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 2 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

Expliciter les sommes de $\sum \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \arctan^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
2. Montrer que pour tout réel positif x, on a $\arctan(x) \leqslant x$ et en déduire que $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier naturel non nul n.
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout réel x supérieur à 1, on a : $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{2k+1}{(k+1)^2}$ puis que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{4}{n}$$
5. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.