

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Convergence des intégrales de Bertrand sur $[2, +\infty[$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$.

1. f est-elle intégrale sur $[2, +\infty[$? (question si $5/2$: sur $]1, +\infty[$?)

2. Montrer que :

$$\int_2^3 f(x)dx \leq \frac{\ln(3)}{2}.$$

3. (Question indépendante!) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, positive et décroissante. Pour tout réel x positif, on pose :

$$g(x) = f(x) \sin(x).$$

On suppose g intégrable. Montrer que f l'est également.

Question de cours

Énoncé et preuve du critère d'équivalence.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et donner ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
4. Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge. En déduire que $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ puis un équivalent en 0 de f .

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de x , l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

est-elle définie ?

2. Étudier la monotonie de f .
3. Pour tout réel strictement positif x , calculer $f(x) + f(x+1)$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
5. Déterminer la limite de f en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)} dt$.

Exercice 1

Étudier l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{t \exp(-\sqrt{t})}{1+t^2} dt$,
 $\int_0^{+\infty} \exp(-t \arctan(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} (t+2 - \sqrt{t^2+4t+1}) dt$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et positive tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x+1)}{f(x)} \right) = \frac{1}{2}$.
Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.