

Mini question de cours

Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice 1

1. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x$.
3. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$.

Exercice 2

Soient $f : t \mapsto \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi}$ et $g : t \mapsto \begin{cases} \frac{f(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ deux fonctions définies sur $[0, \pi]$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

1. Démontrer la convergence de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ puis de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Calculer $\int_0^\pi f(t) \cos(kt) dt$ avec k entier supérieur à 1.
3. Démontrer que, pour tout t de $]0, \pi]$, pour tout entier naturel non nul n , on a :
$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right) = 0$.
5. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Mini question de cours

Convergence et somme de séries exponentielles et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Exercice 1

Expliciter les sommes de $\sum \frac{1}{n!}$, $\sum \frac{n^2}{n!}$ et $\sum \frac{\binom{n}{k}}{n!}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2 puis écrire en **Python** une fonction qui renvoie les N premières valeurs de la suite (u_n) .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
(c) Établir que, pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
4. On se propose de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))$ converge et : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
(c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
(d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$ puis $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$ et conclure.

Mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}$$

puis expliciter la somme de $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
2. Montrer que pour tout réel positif x , on a $\arctan(x) \leq x$ et en déduire que $u_n \geq v_n$ pour tout entier naturel non nul n .
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout réel x supérieur à 1, on a : $\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \geq \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$
puis que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{4}{n}$$

5. En déduire la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.