MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 1

Banque CCNINP :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{((-1)^n+\mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ en sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Convergence de la série $\sum \frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^{\beta}}$ avec β un réel.

Exercice 1

Banque CCNINP :

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$.** En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas $\alpha > 0$.** Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1

Banque CCNINP : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 2

1.(a) Montrer la convergence de $\sum \frac{1}{k!}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}$ pour tout entier naturel n.

2.(a) Montrer que $\sum_{k\geqslant 1} \sin(k)$ est bornée.

(b) En déduire que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(k)}{k}$ converge.