

Définition et QC

Définir ce qu'est une fonction convexe et montrer :

1. Distributivité du et sur le ou.
2. Négation de l'implication.
3. Principe de la contraposée.

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :

(a) $h : x \mapsto \ln(|x|) + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$

(b) $g : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $w : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 2

1. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n) .
Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Définition et QC

Illustrer, sans justification, les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$ avec A et B deux parties non disjointes de E un ensemble non vide et montrer que, si $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair alors n est pair et en déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1

1. Nier les propositions suivantes :

(a) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$.

(c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est 3-périodique alors f' est 3-périodique.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Citer l'inégalité des pentes et faire un dessin illustrant cette inégalité et démontrer le principe de succession et le principe de la récurrence double.

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue, m est un paramètre) :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2} ; \qquad \sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
2. Montrer que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a :

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Définition et QC

Expliquer la notion de contraposée et démontrer une CNS pour que C_f , courbe représentative d'une fonction numérique f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$, soit symétrique par rapport à l'origine... puis généraliser!

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :

(a) $h : x \mapsto \ln(|x|) + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$

(b) $g : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $w : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 2

1. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n) .

Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définir ce qu'est une fonction paire/impaire/périodique puis citer les croissances comparées de manière générale mais ne les démontrer que pour les puissances valant 1.

Exercice 1

1. Nier les propositions suivantes :

(a) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$.

(c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est 3-périodique alors f' est 3-périodique.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner l'inégalité de Jensen puis montrer que f , fonction numérique f définie sur un intervalle I de réels non réduit à un point, est convexe si et seulement pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante. Dire, sans preuve, ce que cela va entraîner comme CNS pour les fonctions convexes dérivables puis dérivables deux fois et citer, sans preuve, l'inégalité des pentes.

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue, m est un paramètre) :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2} ; \qquad \sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
2. Montrer que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a :

$$x^x(1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$