EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^{\alpha} \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.

   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc
   $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
   f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
   $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \iff \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,
$\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right)=2\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=2\ln n+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\sim}1$, on en déduit que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{8}\times\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge.

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\varepsilon.$ (1)

   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$.
   Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\dfrac{1-l}{2}$.
   Et donc, $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+l}{2}$.
   On pose $q=\dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q\in\,]0,1[$.
   On a alors $\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\leqslant qu_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant N}q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]0,1[$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.
   Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n > 0$.

   De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :
   $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)

   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow u_n > 0$.

   D'après (*), $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$. (**)

   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $\dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   $|u_n| = \dfrac{\sqrt{2} \ln n \sin(\dfrac{1}{n})}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

   On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

   D'après 1., $\sum\limits_{n \geqslant 2} |u_n|$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge absolument.

   De plus, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées
Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

La convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ s'obtient entre autre par le critère d'Alembert puisque

$$\left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$$

On peut alors majorer le reste de la série en prenant appui sur une somme géométrique

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\frac{1}{1-1/n+1} = \frac{1}{n.n!}$$

Notons que raisonner par récurrence ne marche pas.

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j \right\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.

b) Par définition de Φ_j, on a

$$j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln \Phi_j$$

On en déduit $\Phi_j \geqslant \mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.

c) Par définition de Φ_j, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j - 1} \frac{1}{n} \leqslant j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, sachant que $\Phi_j \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leqslant j \leqslant \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = \mathrm{e}^{j-\gamma+o(1)}$$

$\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

a) On a

$$\Sigma_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{tk}\right) = \operatorname{Im}\left(e^t \frac{1-e^{tn}}{1-e^t}\right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leqslant \left|e^t \frac{1-e^{tn}}{1-e^t}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^t|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est effectivement bornée.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées.
Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

Posons

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

On observe

$$u_n = 2H_n - H_{n^2} = 2(\ln n + \gamma + o(1)) - \ln(n^2) - \gamma + o(1) \to \gamma$$

Q 1)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Q 2)

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

On a

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln(2k+1) - \ln(2k+1) = 0$$

et

$$\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) + o(1) \to 0$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

On a

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln n\right)$$

donc

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n-1)-\ln n\right)+\sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n+1)-\ln n\right)$$

Après télescopage

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{N+1}{N} - \ln 2 \to -\ln 2$$

On en déduit que la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

Par comparaison série intégral,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$

donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$

Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha \leqslant 0$.