

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Rappeler la définition de $f'(a)$ et donner l'équation à la tangente à C_f en $(a; f(a))$ et montrer :

1. Distributivité du et sur le ou.
2. Négation de l'implication.
3. Principe de la contraposée.

Exercice 1

1. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x - 3| + 2|x + 1|$.
2. Résoudre l'équation $|x + 2| + |3x - 1| - 4 = 0$, d'inconnue x réelle.
3. Résoudre l'inéquation $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$, d'inconnue x réelle.

Exercice 2

1. On admet que $(n + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n) .
Expliciter en particulier $(n + 1)^4$ et $(n + 1)^5$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Définition et QC

Expliquer le raisonnement par contraposée et montrer que, si $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair alors n est pair et en déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réel :

1. $x - \frac{2}{x} > 0$,
2. $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$,
3. $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner quelques limites classiques obtenus par taux d'accroissement et démontrer le principe de succession et le principe de la récurrence double.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

2. Montrer que l'application $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout y réel.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

2. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer qu'il existe un irrationnel u tel que $u^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Citer les lois de Morgan et la distributivité du et sur le ou, du ou sur le et et démontrer une CNS (conditions nécessaires et suffisantes) pour que C_f , courbe représentative d'une fonction numérique f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$, soit symétrique par rapport à l'origine... puis généraliser!

Exercice 1

1. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x - 3| + 2|x + 1|$.
2. Résoudre l'équation $|x + 2| + |3x - 1| - 4 = 0$, d'inconnue x réelle.
3. Résoudre l'inéquation $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$, d'inconnue x réelle.

Exercice 2

1. On admet que $(n + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n) .
Expliciter en particulier $(n + 1)^4$ et $(n + 1)^5$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Définition et QC

Expliquer comment obtenir le comportement asymptotique d'une fonction puis citer les croissances comparées de manière générale mais ne les démontrer que pour les puissances valant 1.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réel :

1. $x - \frac{2}{x} > 0$,
2. $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$,
3. $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

Définition et QC

Citer la proposition sur dérivée et opérations (somme, produit, quotient, réciproque) puis montrer que f , fonction numérique définie sur un intervalle I de réels non réduit à un point, est convexe si et seulement pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante. Dire, sans preuve, ce que cela va entraîner comme CNS pour les fonctions convexes dérivables puis dérivables deux fois et citer, sans preuve, l'inégalité des pentes.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

2. Montrer que l'application $f : x \mapsto \frac{x}{1 - x^2}$ est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout y réel.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

2. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer qu'il existe un irrationnel u tel que $u^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.