MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Convergence simple et uniforme de (f_n) avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}.$$

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n(0) = 0$ et pour tout x de $]0, 1]$:

$$u_n(x) = x^n \ln(x).$$

A-ton CVU sur $[0, 1]$?

Exercice 2

Banque CCINP :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ pour } x \text{ réel et } n \text{ entier naturel non nul.}$$

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Étude de la convergence : simple, normale et uniforme avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}.$$

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n)

   ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \text{ pour } x \text{ réel positif et } n \text{ entier naturel.}$$