

EXERCICE 8 analyse

Énoncé exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Corrigé exercice 8

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$, donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$, donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.

On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.

Comme $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.

Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

(b) Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

Donc d'après 1.(a), $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = n e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Alors, comme, $\forall x \in [0, +\infty[, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Et donc $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

$$\text{Donc } \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

C'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 9 analyse

Énoncé exercice 9

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
 - (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Corrigé exercice 9

Pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ bornée on pose : $\|f\|_{\infty, X} = \sup_{t \in X} |f(t)|$

1. Soit $g_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{C}$.
Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ou encore :

(g_n) converge uniformément vers g sur $X \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, g_n - g$ est bornée sur X et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_{\infty, X} = 0$.

2. (a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \frac{n+2}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1$.

Si $x \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0 \leq e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)| \leq e^{-nx^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.
- (c) Soit $a > 0$.

On a : $\forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).

Donc $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$.

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} = 0$ (car $\frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-na^2}$).

Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

- (d) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0, +\infty[$ car pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} \leq 2.$$

D'autre part, f est bornée sur $]0, +\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_{\infty,]0, +\infty[}$ existe.

On a $|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{(n+2)e^{-1} \cos 1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = e^{-1} \cos 1 \neq 0$.

Or $\|f_n - f\|_{\infty,]0, +\infty[} \geq |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc $\|f_n - f\|_{\infty,]0, +\infty[} \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 11 analyse

Énoncé exercice 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f .
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
 - (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Corrigé exercice 11

1. Par contraposée :
si (f_n) converge uniformément vers f alors :
il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ existe et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.
C'est-à-dire la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$.
Si $x \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2x^2}$.
Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
(b) Soit $a > 0$.
 $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2a^2}$ (majoration indépendante de x).
Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+n^2a^2}$.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n^2a^2} = 0$.
On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a, +\infty[$.
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\pi}{2n}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, +\infty[$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.
On en déduit, d'après 1., que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0, 1]$ avec

$$u'_n(x) = x^{n-1}(1 + n \ln x)$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0,1]} |u_n| = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

Pour $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \rightarrow 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.

On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2 x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1 + (1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0	x_n	$+\infty$
$f_n(x)$	0	M_n	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1 + \frac{1}{n-1})} = \frac{e^{-\frac{1}{n} \ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \rightarrow 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

a) Soit $x \in [0, +\infty[$.

Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $x > 0$ alors $u_n(x) \rightarrow 0$ car $e^{-nx} \rightarrow 0$.

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

b) On a

$$\sup_{[a, +\infty[} |u_n(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = e^{-\pi/2} \not\rightarrow 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est sommable.

Pour $x \neq 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée et donc la série numérique

$\sum f_n(x)$ converge.

On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n(2/\sqrt{n}) = \frac{4}{e^2}$$

Il n'y a donc par convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

En revanche, pour $a > 0$ et n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n} \leq a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.

A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Montrons qu'il n'y a cependant par convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \geq f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{4}{e^2}$$

et donc la fonction somme ne tend pas vers 0 en 0.

Ceci contredit sa continuité.