BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Donner les développements limités de exp, sin, cos, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 2.$$

Exercice 2

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ et telle que la courbe représentative de f soit tangente au point I de coordonnées $(0,3)$ à la droite (T) d'équation $y = 4x+3$.

1. Expliciter f.
2. Montrer qu' il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f : x \mapsto c + \dfrac{dx}{x^2+1}$.
3. Étudier la fonction f.
4. Étudier la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à la tangente (T) au point I de coordonnées $(0,3)$. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) (on prendra pour unité 2 cm et on utilisera un repère orthonormé).
6. Soit g la fonction d'une variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}.$$

On note (C') la courbe représentative de g. Sans étudier la fonction g, construire (en justifiant!) en pointillé la partie de (C') non contenue dans (C).

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Formules d'Euler et de De Moivre

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n suivante sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [0,1], f_n(x_n) = 0$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \leqslant 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

Exercice 2

Soit α un élément de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha)).$$

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $|1+iz| = |1-iz|$.
2. En déduire que si z est une solution de (E) alors il existe un réel θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $z = \tan(\theta)$.
3. Résoudre (E).

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Rappeler les formules de duplications et démontrer les formules celles avec $\tan(2\theta)$.

Exercice 1

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $]-1, +\infty[$ par :
$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)\,.$$
2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g : x \mapsto e^{-x}\ln\left(1+e^{2x}\right).$$

Exercice 2

On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$(z^2+1)^8 = (z^2-1)^8.$$

1. Résoudre l'équation $z^8 = 1$ d'inconnue z complexe.
2. On suppose que z est une solution de (E). Montrer qu'il existe k dans $[\![1, 7]\!]$ tel que :
$$z^2 = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)}.$$
3. Résoudre (E).