BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Degré et opérations.

Exercice 1

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto e^{-x}\ln\left(1+e^{2x}\right).$$

Exercice 2

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ et telle que la courbe représentative de f soit tangente au point I de coordonnées $(0,3)$ à la droite (T) d'équation $y = 4x+3$.

1. Expliciter f.
2. Montrer qu' il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f : x \mapsto c + \dfrac{dx}{x^2+1}$.
3. Étudier la fonction f.
4. Étudier la position de la courbe (C) représentative de f par rapport à la tangente (T) au point I de coordonnées $(0,3)$. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) (on prendra pour unité 2 cm et on utilisera un repère orthonormé).
6. Soit g la fonction d'une variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}.$$

   On note (C') la courbe représentative de g. Sans étudier la fonction g, construire (en justifiant!) en pointillé la partie de (C') non contenue dans (C).

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Tracé de sin, cos, tan et arctan et dérivées de ses fonctions.

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3=2.$$

Exercice 2

Soient f et g les fonctions : $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt\end{cases}$. La courbe représentative de g dans le plan P sera notée Γ.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, on a :
$$\arctan(2x)-\arctan(x)\leqslant g(x)\leqslant\frac{1}{2x}.$$
3. En déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(g(x))$.
4. Déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
5. Démontrer que g admet un développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0.
6. Étudier la parité de g et montrer que : $g(x)\underset{0}{=}x-\dfrac{7}{6}x^3-\dfrac{31}{40}x^5+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.
7. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
8. Déterminer la position relative de la courbe g et de sa tangente au point d'abscisse 0 et enfin tracer la courbe Γ.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Donner le théorème de la bijection continue et le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

On considère $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Montrer que, si x est un réel strictement positif différent de 1, alors $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$.

Exercice 2

On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(z^2+1)^8 = (z^2-1)^8.$$

1. Résoudre l'équation $z^8 = 1$ d'inconnue z complexe.
2. On suppose que z est une solution de (E). Montrer qu'il existe k dans $[\![1, 7]\!]$ tel que :

$$z^2 = -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)}.$$

3. Résoudre (E).