

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Exercice 1

Banque CCINP : On pose $f_n : x \mapsto (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx \right)$.

Exercice 2

On définit $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $]0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) \text{ et } u_n(0) = 0.$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0, 1]$.

3. En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Théorème d'intégration d'une limite uniforme sur un segment $[a, b]$

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite

$$\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \int_a^b f(x) dx.$$

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 2

On définit $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire la convergence pour tout $x \in [0, 1]$ de la suite $(u_n(x))$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $u'(x) = u(x - x^2)$.

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Continuité de ζ sur $]1, +\infty[$ et limite de ζ en $+\infty$.

Exercice 1

Banque CCINP : On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on introduit la fonction f_n suivante :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$.

3. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

4. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec a un réel strictement positif.