

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définir une racine n -ième et donner ses propriétés classiques et démo : Résolution d'équation du second degré à valeurs complexes.

Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ et $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}\right)^{2025}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|.$$

Exercice 2

1. Trouver les réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $(a+ib)^n + (a-ib)^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner le lien entre $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ est racine du polynôme A avec $A : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$.
3. Diviser l'équation $A(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}^*$ par x^2 et poser $u = x - \frac{1}{x}$ dans l'équation obtenue ; en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Définition et QC

Définir similitude et donner ses propriétés classiques et démo : Si $\max(A)$ avec A partie non vide de $\mathbb{R}$ existe alors $\text{Sup}(A)$... + critère séquentiel de la borne supérieure.

Exercice 1

On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Donner la forme trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

1. Soient z et z' deux complexes unitaires tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un réel.
2. Calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ et $(1 + i)^n - (1 - i)^n$ avec n un entier.
3. On pose : $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $S = a + a^4$ et $T = a^2 + a^3$. Calculer $S + T$ et $S \times T$, en déduire les valeurs de S et T puis de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Définition et QC

Interprétation géométrique des complexes et démo : Linéarisation et "délinéarisation" sur un cas particulier mais pas trop simple non plus.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $(1 - i)\overline{(1 + i)}$ et $\left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \bar{z} + 1$.

Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$z^5 + 1 = 0 \tag{1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{2}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (4). On donnera les solutions sous forme trigonométrique la plus simple possible.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (5).
3. Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^5 + 1 = (z + 1)Q(z).$$

On note (6) l'équation suivante :

$$Q(z) = 0 \tag{3}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (6).
5. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $u + \frac{1}{u}$ est solution de (5) si, et seulement si, u est solution de (6).
6. Exprimer sous forme trigonométrique les valeurs prises par $u + \frac{1}{u}$ lorsque u décrit l'ensemble des solutions de (6).
7. En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ avec des radicaux (racines carrées).

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définir l'argument et donner ses propriétés classiques et démo : Résolution d'équation du second degré à valeurs complexes.

Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ et $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}\right)^{2025}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|.$$

Exercice 2

1. Trouver les réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $(a+ib)^n + (a-ib)^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner le lien entre $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ est racine du polynôme A avec $A : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$.
3. Diviser l'équation $A(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}^*$ par x^2 et poser $u = x - \frac{1}{x}$ dans l'équation obtenue ; en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

MP2I **Sujet 2**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Interprétation géométrique des complexes et démo : Si $\max(A)$ avec A partie non vide de $\mathbb{R}$ existe alors $\text{Sup}(A)$... + critère séquentiel de la borne supérieure.

Exercice 1

On pose $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Donner la forme trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

1. Soient z et z' deux complexes unitaires tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un réel.
2. Calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ et $(1 + i)^n - (1 - i)^n$ avec n un entier.
3. On pose : $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $S = a + a^4$ et $T = a^2 + a^3$. Calculer $S + T$ et $S \times T$, en déduire les valeurs de S et T puis de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Définition et QC

Expliquer le concept de majorant, maximum, borne supérieure et démo : Linéarisation et "délinéarisation" sur un cas particulier mais pas trop simple non plus.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $(1 - i)\overline{(1 + i)}$ et $\left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \bar{z} + 1$.

Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$z^5 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (5)$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (4). On donnera les solutions sous forme trigonométrique la plus simple possible.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (5).
3. Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^5 + 1 = (z + 1)Q(z).$$

On note (6) l'équation suivante :

$$Q(z) = 0 \quad (6)$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (6).
5. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $u + \frac{1}{u}$ est solution de (5) si, et seulement si, u est solution de (6).
6. Exprimer sous forme trigonométrique les valeurs prises par $u + \frac{1}{u}$ lorsque u décrit l'ensemble des solutions de (6).
7. En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ avec des radicaux (racines carrées).