MP2I **Sujet 1** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 5 | cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliquer le concept de majorant, maximum, borne supérieure et démo : Démontrer l'inégalité triangulaire pour le module.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $\dfrac{1}{1+i}$ et $\dfrac{(3+5i)^2}{1-2i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1| = |z|+1$.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha)).$$

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $|1+iz| = |1-iz|$.
2. En déduire que si z est une solution de (E) alors il existe un réel θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $z = \tan(\theta)$.
3. Résoudre (E).

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 5 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définir la partie entière et donner ses propriétés classiques et démo : Angle moitié puis établir la factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et $i(1-3i)^2$.
2. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \, , z' = \lambda z.$$

Exercice 2

1. Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$, on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb+a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb+a).$$

   Expliciter $C_n + iS_n$ puis C_n puis S_n.
2. Déterminer le signe de f sur $[0, \pi]$ où f est la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2+\sqrt{3})\cos(2x) + (3+2\sqrt{3})\cos(x) - (2+\sqrt{3})$$

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner les formules de De Moivre et d'Euler et démo : Expliciter les racines $n^{ième}$ et calculer leur somme.

Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de $1 - i\sqrt{3}$ et $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.
2. Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer
$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 2.$$
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$z^n = \frac{1 - i\tan(a)}{1 + i\tan(a)}$$
avec a un élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et n un entier naturel non nul.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliquer le concept de minorant, minimum, borne inférieure et démo : Démontrer l'inégalité triangulaire pour le module.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $\dfrac{1}{1+i}$ et $\dfrac{(3+5i)^2}{1-2i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1| = |z|+1$.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha)).$$

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $|1+iz| = |1-iz|$.
2. En déduire que si z est une solution de (E) alors il existe un réel θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $z = \tan(\theta)$.
3. Résoudre (E).

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 5 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définir la valeur absolue et donner ses propriétés classiques et démo : Angle moitié puis établir la factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.

Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et $i(1-3i)^2$.
2. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \,, z' = \lambda z.$$

Exercice 2

1. Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$, on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb + a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb + a).$$

   Expliciter $C_n + iS_n$ puis C_n puis S_n.
2. Déterminer le signe de f sur $[0, \pi]$ où f est la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2+\sqrt{3})\cos(2x) + (3+2\sqrt{3})\cos(x) - (2+\sqrt{3})$$

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définir module et donner ses propriétés classiques et démo : Expliciter les racines $n^{ième}$ et calculer leur somme.

Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de $1 - i\sqrt{3}$ et $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.
2. Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer
$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 2.$$
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$z^n = \frac{1 - i\tan(a)}{1 + i\tan(a)}$$
avec a un élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et n un entier naturel non nul.