MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Tracer de arctan et expliciter arctan′ et démo : Démontrer la propriété fondamentale de ln et en déduire $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ avec $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Exercice 1

Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2x) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2x) = 2.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, on pose :

$$U_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}, R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k}\right), \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

et $S_n = (1\times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1)\times n)$.

1. Expliciter U_n et R_n.
2. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right)$.
3. En déduire que :
$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.$$

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 4 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Expliquer les sommes sur les pairs/impairs et démo : Sommes géométriques et factorisation de $a^n - b^n$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter S_n, P_n et Q_n avec :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right).$$

Exercice 2

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $]-1, +\infty[$ par :
$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$
2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g : x \mapsto e^{-x}\ln\left(1 + e^{2x}\right).$$

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner la formule du pion et celle du triangle de Pascal et démo : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout réel x et en déduire que pour tout $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, on a : $\arccos(1-x^2) = 2\arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue x réel :

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout réel x.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue θ réel :

$$8(\cos(\theta))^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

4. Conclure!

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliciter $\arcsin'$, $\arccos'$ et $\arctan'$ et démo : Démontrer la propriété fondamentale de $\ln$ et en déduire $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ avec $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Exercice 1

Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(2x) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(2x) = 2.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$U_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}, R_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k}\right), \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

et $S_n = (1\times 2 + 1\times 3 + \cdots + 1\times n) + (2\times 3 + \cdots + 2\times n) + \cdots + ((n-1)\times n)$.

1. Expliciter U_n et R_n.
2. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right)$.
3. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.$$

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition et tracé de et   et démo : Sommes géométriques et factorisation de $a^n - b^n$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter S_n, P_n et Q_n avec :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right).$$

Exercice 2

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto e^{-x}\ln\left(1+e^{2x}\right).$$

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner les propriétés classiques de exp et démo : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout réel x et en déduire que pour tout $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, on a : $\arccos(1-x^2) = 2\arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue x réel :

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout réel x.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue θ réel :

$$8\left(\cos(\theta)\right)^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

4. Conclure!