MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 3 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner les propriétés classiques de ln et démo : Expliciter de deux façons différentes $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue x élément de $[-\pi, \pi]$:

1. $\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$.
2. $\cos(2x) = \sin(x)$.
3. $\cos(3x) + \sin(3x) = 1$.

Exercice 2

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.(a) Calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$.

(b) Déterminer la limite de $u \mapsto (1+u)e^{-u}$ en $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0.

(c) Étudier le sens de variations de f.

(d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$.

(a) Calculer la dérivée de φ.

(b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u$.

(c) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2}$.

3.(a) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$.

(b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote Δ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 3 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition et tracé de et arcsin et démo : formules avec $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Exercice 1

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout x de $[-1, 1]$, on a :
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$
2. Montrer que $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur à 2.

1. On pose $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. On n'utilisera pas l'explicitation de B_n qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.
   (a) Exprimer D_n en fonction de C_n.
   (b) Trouver une relation entre D_n, C_n et B_n basée sur le développement de $(k+1)^3$ et en déduire B_n.
2. (a) Pour tout entier k de $[\![2, n]\!]$, relier $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-2}{k-2}$.
   (b) En déduire $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Tracer les fonctions puissances et rappeler la définition de a^b avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et démo : expliciter $\cos(\arcsin(x))$ puis en déduire la dérivée de arcsin.

Exercice 1

1. Soit θ un réel. Exprimer, sous réserve d'existence, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$: $\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$. Expliciter S_n.
2. On pose maintenant $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter S_n.
3. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose finalement :

$$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n).$$

Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right)$ avec $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et en déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.$$

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Expliquer les échanges de sommes et démo : expliciter $\cos(\arcsin(x))$ puis en déduire la dérivée de arcsin.

Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue x élément de $[-\pi, \pi]$:

1. $\sin(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. $\cos(2x) = \sin(x)$.
3. $\cos(3x) + \sin(3x) = 1$.

Exercice 2

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+1)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.(a) Calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$.
  (b) Déterminer la limite de $u \mapsto (1+u)e^{-u}$ en $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0.
  (c) Étudier le sens de variations de f.
  (d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$.
  (a) Calculer la dérivée de φ.
  (b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u$.
  (c) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.

3.(a) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.
  (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote Δ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Tracer les fonctions puissances et rappeler ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas faire avec les puissances et démo : formules avec $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Exercice 1

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout x de $[-1, 1]$, on a :
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$
2. Montrer que $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur à 2.

1. On pose $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. On n'utilisera pas l'explicitation de B_n qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.
   (a) Exprimer D_n en fonction de C_n.
   (b) Trouver une relation entre D_n, C_n et B_n basée sur le développement de $(k+1)^3$ et en déduire B_n.
2. (a) Pour tout entier k de $[\![2, n]\!]$, relier $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-2}{k-2}$.
   (b) En déduire $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

MP2I **Sujet 3** — Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner les formules des sommes géométriques et de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et démo : Expliciter de deux façons différentes $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 1

1. Soit θ un réel. Exprimer, sous réserve d'existence, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$: $\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$. Expliciter S_n.
2. On pose maintenant $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter S_n.
3. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on pose finalement :

   $$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n).$$

   Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right)$ avec $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et en déduire que :

   $$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$