EXERCICE 10 analyse

Énoncé exercice 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.
   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n+x}$,
   et donc : $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$ (majoration indépendante de x).
   Donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\mathrm{e}}{n} = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$.

EXERCICE 14 analyse

Énoncé exercice 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé exercice 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$.
   On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
   On a :
   $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x.$
   Or, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_\infty$.
   Donc $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b ||f_n - f||_\infty \mathrm{d}x = (b - a)\,\|f_n - f\|_\infty$. (*)
   Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Donc d'après (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, donc converge simplement sur $[a, b]$.
   On pose alors, également, $\forall x \in [a, b]$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers S.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a, b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.
   On en déduit que S est continue sur $[a, b]$.
   Et d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Or $\displaystyle\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ car il s'agit d'une somme finie.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ce qui signifie que $\sum \displaystyle\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a,b]$ permet d' intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0, \dfrac{1}{2}\right] \subset \left]-1, 1\right[$.

   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

   On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 16 analyse

Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\Big]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

Corrigé exercice 16

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.

   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.

   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.
   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
2. On a $S(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

   Or $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$.

   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $S(1)$.

   Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.

   On a donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \mathcal{O}(1)$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

   En remarquant que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ on voit que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. On a déjà vu que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$. (majoration indépendante de x).

   On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ Et on a : $\forall\, x\in[0;1]$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$.

En vertu de ce qui précède, $S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right)$.
Or $\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{N+1}-1\xrightarrow[N\to+\infty]{}-1$.
Donc $S'(1)=-1$.

Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ pour $n \geqslant 1$ et dérivables sur $]0,1]$ avec

$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x)$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0,1]} |u_n| = -u_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{n\mathrm{e}} \to 0$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Pour $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n}$.
On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

---

a) Soit $x \in [0,+\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
b) On a

$$\sup_{[a,+\infty[} |u_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geqslant u_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{N+1+x^2} \leqslant \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ est sommable.
Pour $x \neq 0$, $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée et donc la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
On peut donc affirmer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
L'étude des variations des fonctions f_n donne

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(2/\sqrt{n}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

Il n'y a donc par convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, pour $a > 0$ et n assez grand de sorte que $2/\sqrt{n} \leqslant a$, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$$

et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ car la série numérique $\sum f_n(a)$ converge.
A fortiori, il y a aussi convergence uniforme de $\sum f_n$ sur chaque $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
Montrons qu'il n'y a cependant par convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.
Par l'absurde, s'il y avait convergence uniforme sur $[0, +\infty[$, la fonction somme de la série $\sum f_n$ serait continue car chaque f_n est continue. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Par positivité des fonctions sommées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) \geqslant f_N\left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$$

et donc la fonction somme ne tend par vers 0 en 0.
Ceci contredit sa continuité.

a) Pour $x \in]0,1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leqslant x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0,1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0,1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

a) Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b) On a

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} |u_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

or $u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \geqslant 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geqslant 0$ et

$$u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leqslant \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

puis

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Récurrence établie.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique

$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$

et donc convergence de la suite $(u_n(x))$.
c) Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x)) \right|$$

donc

$$|u(x) - u_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0, 1]\,, \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u(1-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \not\to \int_0^1 0\,\mathrm{d}t.$$

(c) Pour n assez grand, $\sup_{[a;1]} \left|f_n(x)\right| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a\,;1]$.