BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Expliquer comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Exercice 1

1. Soient A et B les ensembles suivants :

$$A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + 3y + 2z = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ (a + b - c, b - c, b, b + 2a) \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

   (a) Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels

   (b) D éterminer une base de A, de B puis de $A \cap B$.

2. Même question avec A l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 et B l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la somme de la diagonale (qu'on appelle la trace) vaut 0.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$

1. On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre (E') sachant qu'il existe a un réel tel que $x \mapsto ax \exp(2x)$ soit solution de (E').
3. En déduire les solutions de (E).

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Théorème de la base incomplète (l'énoncer, pas le démontrer!!!)

Exercice 1

1. Soient $u = (1, 2, 0, 1),\ v = (-1, 1, 0, 2),\ w = (2, 1, 1, 0)$.
   (a) La famille (u, v, w) est -elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^4$? génératrice de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
2. On pose maitenant : $u = 1 + 2X + X^3,\ v = -1 + X + 2X^3,\ w = 2 + X + X^2$.
   (a) La famille (u, v, w) est -elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$? génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?
   (b) Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}_3[X]$?.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$,
2. $y'' + 12y = 0$,
3. $y'' - 7y' = 0$,
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
5. $y'' - 4y' + 3y = 0$,
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Donner la caractérisation des les familles libres, génératrices et des bases par le rang.

Exercice 1

Résoudre le système différentielle suivant d'inconnue y fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x} \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 1$$

sachant qu'il existe a et b deux réels tels que : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une solution de l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x}.$$

Exercice 2

Soient n un entier supérieur à 2, A un espace vectoriel de dimension n et E et F deux sous-espaces vectoriels de A. L'ensemble $E+F$, appelée somme de E et de F, est l'ensemble suivant :

$$E + F = \{e + f, (e, f) \in E \times F\}.$$

1. Montrer que $E+F$ est un espace vectoriel.
2. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ (avec r entier naturel non nul) une famille génératrice de E, $(f_1, \cdots, f_m)$ une famille génératrice de F (avec m entier naturel non nul). Montrer que $(e_1, \cdots, e_r, f_1, \cdots, f_m)$ est une famille génératrice de $E+F$
3. En déduire que $\dim(E+F) \leqslant \dim(E) + \dim(F)$.
4. Montrer que si $E \cap F = \{0_A\}$, alors $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F)$.