

EXERCICE 25 analyse

Énoncé exercice 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Corrigé exercice 25

1. $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.

Or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or f_n est continue sur $[0, 1]$ donc f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

iii) $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 29 analyse

Énoncé exercice 29

On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Corrigé exercice 29

1. Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1-x < 1$).

Donc, par critère d'équivalence, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x, t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Par intégration par parties, justifiée ci-après $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$.

Le terme de variation possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. i) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.).

ii) $\forall t \in]0, +\infty[,$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et $\forall (x, t) \in]0, +\infty[^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$.

iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

iv) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

v) Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

En effet :

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{a}{2}} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}} |\ln t| = 0.$$

$$\text{Donc, au voisinage de } 0^+, \varphi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1 - \frac{a}{2} < 1$).

Donc, φ_1 est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0.$$

Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt$.

EXERCICE 30 analyse

Énoncé exercice 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Corrigé exercice 30

1. Soit $u : (x, t) \mapsto u(x, t)$ une fonction définie de $X \times I$ vers $\mathbb{C}$, avec X et I intervalles contenant au moins deux points de $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- i) $\forall x \in X, t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .

On pose alors $\forall x \in X, f(x) = \int_I u(x, t) dt$.

- ii) u admet une dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur $X \times I$ vérifiant :

- $\forall x \in X, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .

- $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur X .

- iii) il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x, t) \in X \times I, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction f est de classe C^1 sur X et $\forall x \in X, f'(x) = \int_I \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt$.

2. On pose $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2}$.

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc, $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- ii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- $\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- iii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme elle est continue sur $[0, 1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

3. (a) On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

Procédons à une intégration par parties, justifiée par l'existence immédiate de limites finies aux bornes du terme de variation.

$$\int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

ce qui donne $f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0$.

Donc f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{x}{2}y = 0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Etant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \rightarrow +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt$$

Posons alors

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1, +\infty[$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

f_n est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)} dx$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n \ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)} = n f_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

De plus, sachant $\ln(1 + u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.

Par convergence dominée,

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns) ds$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \rightarrow \ell$$

Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{\sin t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt}$$

La fonction $t \mapsto \sin t \cdot e^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc par le théorème de Fubini d'intégration terme à terme $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)t} dt = \frac{1}{n^2 + 1}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 33 : [énoncé]

Les intégrales considérées sont bien définies.

Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1)$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b) $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n.$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(0)$ existe.

$u \mapsto 1/u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{+\ast}$.

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1+u^3}$$

Donc

$$2g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) La fonction g est paire. Pour $0 \leq x \leq x'$, on a pour tout $t \geq 0$, $e^{-tx^2} \geq e^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Pour $x > 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt = \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.