

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Énoncer correctement le théorème de convergence dominée puis celui de continuité des intégrales à paramètres.

Exercice 1

Banque CCINP : On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) dx \right) = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

2. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Énoncer correctement le théorème d'intégration terme à terme (cas positif puis général)

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f_n : x \rightarrow \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$ et $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ pour tout entier naturel n non nul. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et converge vers une limite à préciser.
2. Calculer $\int_0^1 x^n (\ln(x))^n dx$ (avec n entier naturel) et en déduire que :

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Énoncer correctement le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f tend vers L en $+\infty$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx \right)$.
2. Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx^2)}{1+t^3} dt$.
 - (a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$.
 - (b) Étudier les variations de g sur son domaine de définition.
 - (c) Étudier la limite de g en $+\infty$.